Mathematik Klasse 10a, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie 2 – Lösung B 17.05.2011

<u>Aufgabe 1:</u> *3 + 5 Punkte*

Für die Winkel α und β gilt: $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\tan(\beta)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Berechne

a) $\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

$$\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{1}}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

b) $\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\beta)$

$$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan(\beta) \qquad |^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{3}=\frac{\sin^2(\beta)}{1-\sin^2(\beta)} \qquad |\ \cdot\left(1-\sin^2(\alpha)\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}\left(1-\sin^2(\beta)\right)=\sin^2(\beta) \qquad |\ T$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sin^2(\beta)=\sin^2(\beta) \qquad |\ +\frac{1}{3}\sin^2(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\sin^2(\beta) \qquad |\ \cdot\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}=\sin^2(\beta) \qquad |\ \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow\sin(\beta)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}=\tan(\beta) \Leftrightarrow \cos(\beta)=\frac{\sin(\beta)}{\tan(\beta)}$$

$$\mathbf{\tan(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\sin(\beta)}=\tan(\alpha)\cdot\frac{\sin(\beta)}{\tan(\beta)}\cdot\sin(\beta)=\tan(\alpha)\cdot\frac{\sin^2(\beta)}{\tan(\beta)}=\sqrt{3}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=3\cdot\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

<u>Aufgabe 2:</u> *2 + 3 + 4 Punkte*

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich

a) $\frac{\mathbf{\cos^2(\alpha)}}{\mathbf{1-\cos^2(\alpha)}}=\frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\tan^2(\alpha)}}$

b) $\frac{\mathbf{(6-6\sin(\alpha))\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sin(\alpha)\right)}}{\mathbf{2\tan(\alpha)}}=\frac{6\cdot(1-\sin(\alpha))\cdot\frac{1}{3}(1+\sin(\alpha))}{2\tan(\alpha)}$

$=\frac{2\cdot(1-\sin^2(\alpha))}{2\tan(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\cos^2(\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\mathbf{\frac{\cos^3(\alpha)}{\sin(\alpha)}}$

c) $\frac{\mathbf{\sin(\alpha)\left[1-\left(1-\cos^2(\alpha)\right)\right]+\sin(\alpha)\left[1-\left(1-\sin^2(\alpha)\right)\right]}}{\mathbf{\cos(\alpha)\tan(\alpha)}}=\frac{\sin(\alpha)\left[\left(1-\cos^2(\alpha)\right)+\left[1-\sin^2(\alpha)\right]\right]}{\cos(\alpha)\cdot\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$

$=\frac{\left[\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\right]}{1}=\mathbf{1}$

<u>Aufgabe 3:</u> *4 + 4 Punkte*

Ein Fadenpendel besteht aus einem Faden mit einem angehängten Gewicht. Lässt man das Gewicht einfach ruhig hängen, nennt man die Position des Gewichts "Gleichgewichtslage" bzw. "Ruhelage" (Position A).

Die Schwingung eines Fadenpendels lässt sich mit folgender Gleichung beschreiben:

$$y(t)=y_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

Diese Funktionsgleichung gibt die Auslenkung *y(t)* (Entfernung von der Gleichgewichtslage) in Abhängigkeit von der Zeit *t* an. Dabei ist *l* die Länge des Fadens und *g* der Ortsfaktor.

$y_0=1{,}5\,m\quad;\quad l=62{,}5\,m\,,g=10\,N/kg$

Hinweis: Es darf ohne Einheiten gerechnet werden.

a) Berechne die Auslenkung in Meter zum Zeitpunkt $t=5\pi$ Sekunden.

$$y(5\pi)=1{,}5\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{10}{62{,}5}}\cdot 5\pi\right)=1{,}5\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{100}{625}}\cdot 5\pi\right)=1{,}5\cdot\cos\left(\frac{10}{25}\cdot 5\pi\right)=1{,}5\cdot\cos\left(\frac{2}{5}\cdot 5\pi\right)$$
$$=1{,}5\cdot\cos(2\pi)=1{,}5\cdot 1=\mathbf{1{,}5}$$

A: Die Auslenkung beträgt 1,5 m.

b) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem das Pendel das erste Mal durch die Ruhelage geht.

Die Funktion ist vom Typ $y(t)=a\cdot\cos(bx)$ Es gilt $p=\frac{2\pi}{b}$ (Hier Periodendauer T, weil die

Funktionsvariable eine Zeit ist)

$$T=2\frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{62{,}5}{10}}=2\pi\cdot\sqrt{\frac{625}{100}}=2\pi\cdot\frac{25}{10}=2\frac{\pi\cdot 5}{2}=5\pi$$

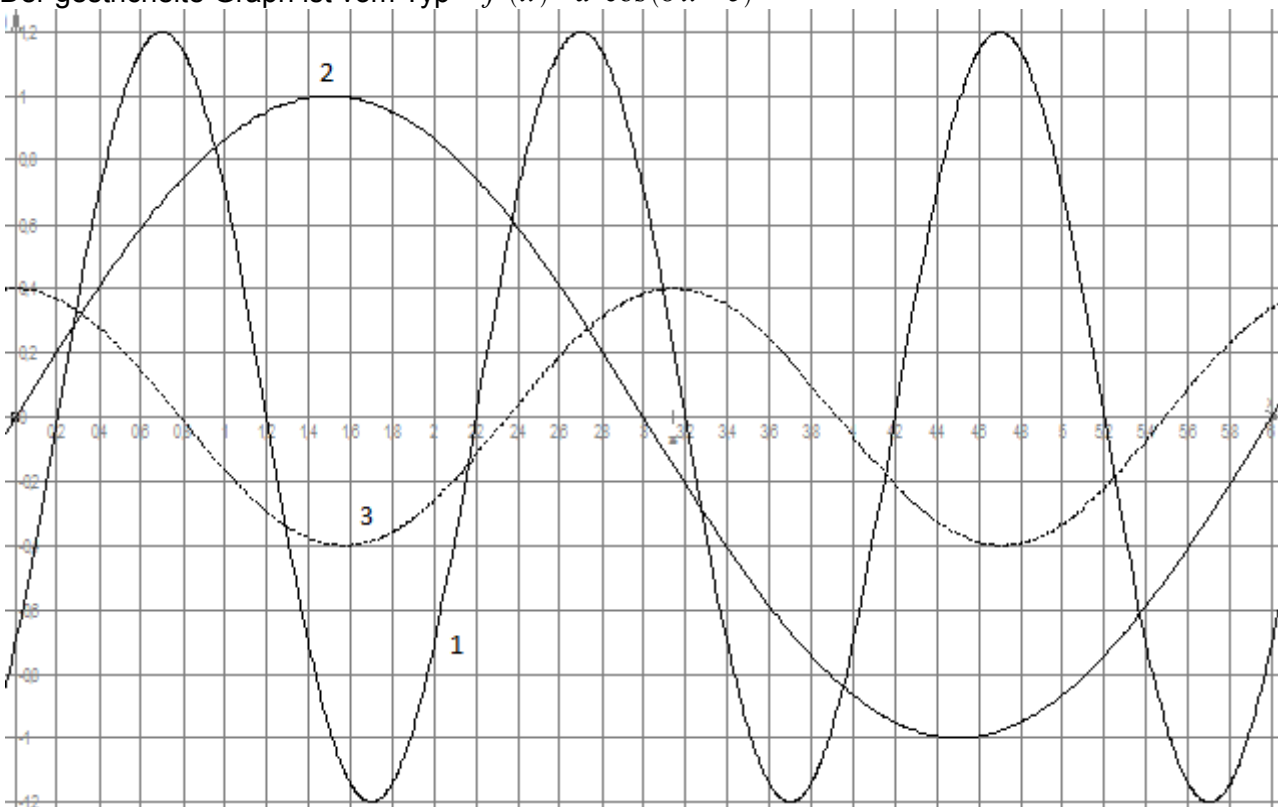
Bei der höchsten Auslenkung wird losgelassen. Nach ¼ der Periode wird die Ruhelage erreicht.

Also $\boldsymbol{t_0=\frac{T}{4}=\frac{5}{4}\pi}$ **A: Nach $1{,}25\pi$ Sekunden wird die Ruhelage das erste Mal erreicht.**

<u>Aufgabe 4:</u> *9 Punkte*

Die beiden durchgezogenen Graphen sind Funktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(bx-e)$

Der gestrichelte Graph ist vom Typ $f(x)=a\cdot\cos(bx-e)$



Gib für alle drei Graphen die Funktionsgleichung an.

1. $a=1{,}2;\ c=0{,}4;\ p=2$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ $f(x)=1{,}2\cdot\sin(\pi(x-0{,}2))$ $\boldsymbol{f(x)=1{,}2\cdot\sin(\pi x-0{,}2\pi)}$	2. $a=1;\ c=0;\ p=6$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ $f(x)=1\cdot\sin(\pi/3(x-0))$ $\boldsymbol{f(x)=\sin(\pi/3x)}$	3. $a=0{,}4;\ c=0;\ p=\pi$ $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{\pi}=2$ $f(x)=0{,}4\cdot\cos(2\pi(x-0))$ $\boldsymbol{f(x)=0{,}4\cdot\cos(2x)}$