Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 Lösung N 28.02.2011

<u>Aufgabe 1 (Exponentialfunktion):</u> *6 Punkte*

Ein Kegel halbiert alle 15 min seine Oberfläche. Berechne, nach wie viel Minuten nur noch 10% der ursprünglichen Oberfläche vorhanden sind.

1. Funktion bestimmen.

$f(t)=b\,a^t$ b: Anfangswert; a: Wachstumsfaktor

$$0{,}5b=b\,a^{T_H} \quad | : b$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5=a^{T_H} \quad | \ \tfrac{1}{T_D}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[T_H]{\frac{1}{2}}=a \quad \Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[15]{2}}=2^{-\frac{1}{15}}\approx 0{,}955$$

Also $f(x)=b\cdot 2^{-\frac{t}{15}}$.

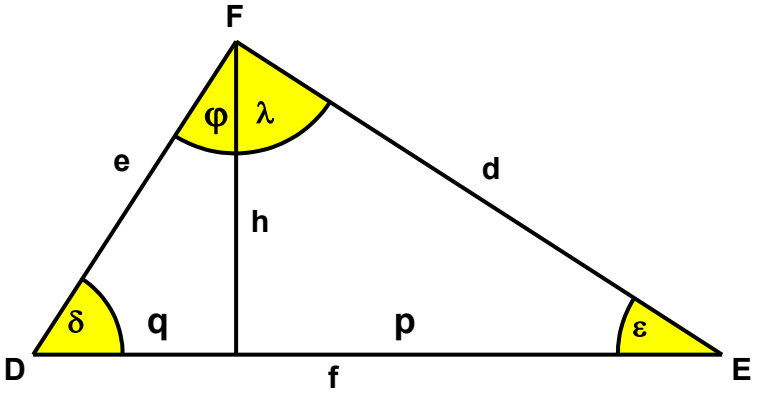
t_{10} ausrechnen für ein Zehntel des Anfangswerts:

$$0{,}1\,b=b\,2^{-\frac{t_{10}}{15}} \quad | : b$$
$$\Leftrightarrow 0{,}1=2^{-\frac{t_{10}}{15}} \quad | \lg$$
$$\Leftrightarrow lg(0{,}1)=lg\left(2^{-\frac{t_{10}}{15}}\right)$$
$$\Leftrightarrow lg(0{,}1)=-\frac{t_{10}}{15}\cdot lg(2) \quad | \cdot\left(-\frac{15}{lg(2)}\right)$$
$$\Leftrightarrow t_{10}=\frac{-15\cdot lg(0{,}1)}{lg(2)}\approx 49{,}83$$

A: Nach etwa 50 min sind nur noch 10% Fläche vorhanden.

<u>Aufgabe 2:</u> 8 *Punkte (4 + 4)*

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck DEF mit der Hypotenuse f, den Katheten d und e, der Höhe h und den Hypotenusenabschnitten p und q.



a) $e=5\,cm\,;d=8\,cm.$ Berechne φ.

$$\tan(\delta)=\frac{d}{e}=\frac{8\,cm}{5\,cm}=\frac{8}{5}\Rightarrow \delta\approx 58{,}00\,°$$

$$\phi=90\,°-\delta\approx \mathbf{32\,°}$$

b) $q = 4\,cm\,;\lambda = 30°$. Berechne e.

$$\phi = 90° - \lambda = 60° \qquad \sin(\phi) = \frac{q}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e} = \frac{q}{\sin(\phi)} = \frac{4\,cm}{\sin(60°)} = \frac{4\,cm}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\,cm}{\sqrt{3}} \approx \mathbf{4{,}62\,cm}$$

<u>Aufgabe 3:</u> *8 Punkte (2 + 4 + 2)*

Ein Passagierflugzeug landet in Düsseldorf mit einem Winkel, der einer Straßensteigung von 60,0% entspricht. Wir nehmen einen konstanten Winkel und eine konstante Geschwindigkeit an.

a) Berechne den Landewinkel α des Flugzeugs, bezogen auf die Erdoberfläche.

$$\tan(\alpha) = 0{,}6 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha \approx 30{,}96°}$$

A: Der Landewinkel beträgt etwa 31°.

b) Das Flugzeug sinkt 4 min lang bei einer Reisegeschwindigkeit von 80 m/s bis es gelandet ist. Berechne die Flughöhe, in welcher der Landeanflug begann.

$4\,min = 240\,s$. Zurückgelegter Weg in der Luft: $s = 240\,s \cdot 80\,m\,s^{-1} = 19{,}2\,km$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h} = s \cdot \sin(\alpha) = 19{,}2\,km \cdot \sin(\arctan(0{,}6)) \approx \mathbf{9{,}88\,km}$$

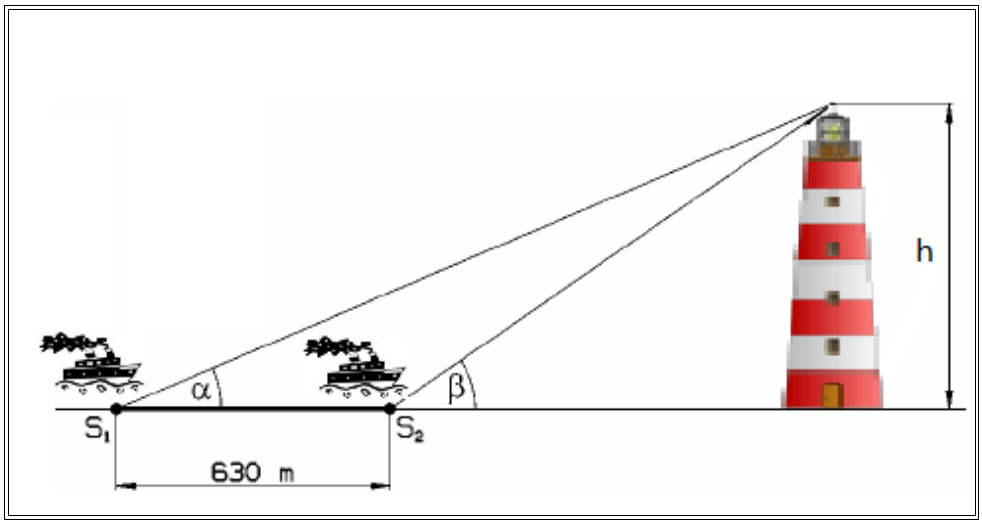
A: Der Sinkflug begann in einer Höhe von etwa 9,88 km.

c) Berechne die während der Landephase zurückgelegte Flugstrecke (überflogene Strecke auf dem Boden.)

$$\cos(\alpha) = \frac{f}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = s\cos(\alpha) = 19{,}2\,km \cdot \cos(\arctan(0{,}6)) \approx \mathbf{16{,}46\,km}$$

A: Das Flugzeug überfliegt eine Strecke von 16,46 km.

Aufgabe 4: 8 *Punkte (6 + 2)*



Von einem Schiff an der Stelle S_1 sieht man die Spitze eines Leuchtturms unter einem Winkel von $\alpha = 4{,}1°$. Das Schiff fährt $630\,m$ direkt auf den Leuchtturm zu bis zum Punkt S_2. Jetzt beträgt der Sichtwinkel $\beta = 14{,}6°$.

a) Berechne die Höhe *h* des Leuchtturms.

Wir betrachten das Dreieck, das durch die Leuchtturmspitze und die beiden Schiffpositionen S_1 und S_2 gebildet wird.

Sei β_2 der Nebenwinkel von β: $\beta_2 = 180° - \beta = 180° - 14{,}6° = 165{,}4°$

Sei a die Seite gegenüber von S_1 und b die Seite gegenüber von S_2, sowie c die Seite zwischen S_1 und S_2 (also *c = 630 m*) und γ der Winkel gegenüber von c.

Dann gilt: $\gamma = 180° - \alpha - \beta_2 = 180° - 4{,}1° - 165{,}4° = 10{,}5°$ und

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = 630\,m \cdot \frac{\sin(4{,}1°)}{\sin(10{,}5°)} \approx 247{,}17\,m$$

Jetzt betrachten wir das rechtwinklige Dreieck aus der Seite *a*, der Leuchtturmhöhe *h* und der Strecke *d* zwischen S_2 und Leuchtturm.

$$\sin(\beta) = \frac{h}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h} = a \cdot \sin(\beta) = 630\,m \cdot \frac{\sin(4{,}1°)}{\sin(10{,}5°)} \cdot \sin(14{,}6°) \approx \mathbf{62{,}30\,m}$$

A: Der Turm ist etwa 62,3 m hoch.

b) Berechne die Entfernung des Schiffes zum Leuchtturm im Punkt S_2.

$$\cos(\beta) = \frac{d}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{d} = a \cdot \cos(\beta) = 630\,m \cdot \frac{\sin(4{,}1°)}{\sin(10{,}5°)} \cdot \cos(14{,}6°) \approx \mathbf{239{,}19\,m}$$

A: Der Turm ist noch etwa 240 m entfernt.

<u>Aufgabe 5:</u> *6 Punkte*

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a,b und c, sowie den Winkeln α,β und γ.

$a=3\,cm\,;\,b=5\,cm\,;\,\beta=50°$.

Berechne α, γ und c mit Hilfe des Sinussatzes.

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a,b und c, sowie den Winkeln α,β und γ.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha)=\frac{a}{b}\cdot\sin(\beta)=\frac{3\,cm}{5\,cm}\cdot\sin(50°)\approx 0{,}4596 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha\approx 27{,}36°}$$

$$\alpha_2=180°-\alpha\approx 152{,}64°$$

$$\boldsymbol{\gamma}=180°-\alpha-\beta\approx\mathbf{102{,}64}°$$

$\gamma_2=180°-\alpha_2-\beta\approx -22{,}64°$ Das ist nicht möglich, also gibt es kein zweites Dreieck.

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{c}=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=3\,cm\cdot\frac{\sin(102{,}64°)}{\sin(27{,}36°)}\approx\mathbf{6{,}37}\,\boldsymbol{cm}$$

Also $\boldsymbol{\alpha=27{,}36°\,;\gamma=102{,}64°\,;\,c=1{,}41\,cm}$