Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 – Lösung B 24.02.2011

<u>Aufgabe 1 (Exponentialfunktion):</u> *6 Punkte*

Ein Zylinder verdoppelt alle 20 min sein Volumen. Berechne, nach wie viel Minuten er sein Volumen verdreifacht hat.

1. Funktion bestimmen.

$f(t)=b\,a^t$ b: Anfangswert; a: Wachstumsfaktor

$$2b=b\,a^{T_D} \quad | : b$$
$$\Leftrightarrow 2=a^{T_D} \quad | \ ^{\frac{1}{T_D}}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[T_D]{2}=a \quad \Rightarrow a=\sqrt[20]{2}=2^{0,05}\approx 1{,}035$$

Also $f(x)=b\,2^{\frac{t}{20}}$.

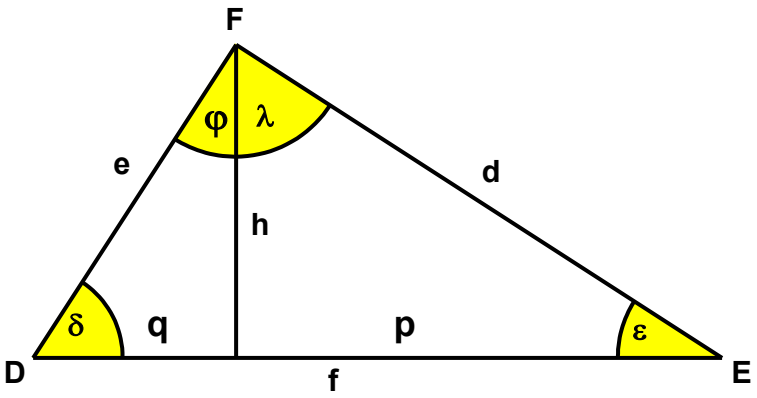
t ausrechnen für Verdreifachung des Anfangswerts:

$$3\mathrm{b}=b\,2^{\frac{t_3}{20}} \quad | : b$$
$$\Leftrightarrow 3=2^{\frac{t_3}{20}} \quad | \lg$$
$$\Leftrightarrow lg(3)=lg\left(2^{\frac{t_3}{20}}\right)$$
$$\Leftrightarrow lg(3)=\frac{t_3}{20}lg(2) \quad | \cdot\frac{20}{lg(2)}$$
$$\Leftrightarrow t_3=\frac{20\cdot lg(3)}{lg(2)}\approx 31{,}70$$

A: Nach etwa 31,7 h hat sich das Volumen verdreifacht.

<u>Aufgabe 2:</u> *12 Punkte (4 + 4 + 4)*

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck DEF mit der Hypotenuse f, den Katheten d und e, der Höhe h und den Hypotenusenabschnitten p und q.



a) $e=6\,cm;\ f=10\,cm.$ Berechne λ.

$$\sin(\epsilon)=\frac{e}{f}=\frac{6\,cm}{10\,cm}=0{,}6\Rightarrow\epsilon\approx 36{,}87°$$

$$\lambda=90°-\epsilon\approx\mathbf{53{,}13°}$$

b) $p=4\,cm;\ \phi=30°.$ Berechne *e*.

$$\lambda=90°-\phi=60° \qquad \tan(\lambda)=\frac{p}{h} \quad\Leftrightarrow\quad h=\frac{p}{\tan(\lambda)}=\frac{4\,cm}{\tan(60°)}\approx 2{,}31$$

$$\cos(\phi)=\frac{h}{e} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}=\frac{h}{\cos(\phi)}=\mathbf{2,\overline{6}}\,cm$$

c) $e=30\,cm\,;\epsilon=45\,°$. Berechne *h*.

$$\tan(\epsilon)=\frac{e}{d} \quad \Leftrightarrow \quad d=\frac{e}{\tan(\epsilon)}=\frac{30\,cm}{\tan(45\,°)}=30\,cm$$

$$\sin(\epsilon)=\frac{h}{d} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h}=d\sin(\epsilon)=30\,cm\cdot\sin(45\,°)=\frac{30}{\sqrt{2}}cm\approx\mathbf{21{,}21\,cm}$$

<u>Aufgabe 3:</u> *8 Punkte (2 + 4 + 2)*

Ein Passagierflugzeug startet in Rio de Janairo mit einem Steigwinkel, welcher einer Straßensteigung von 46,6% entspricht.

a) Berechne den Steigwinkel α des Flugzeugs.

$$\tan(\alpha)=0{,}466\Rightarrow\boldsymbol{\alpha\approx 24{,}99\,°}$$

A: Der Steigwinkel beträgt 25°.

b) Das Flugzeug steigt 1 min lang bei einer Reisegeschwindigkeit von 150 m/s. Berechne die erreichte Flughöhe.

$1\,min=60\,s$. Zurückgelegter Weg in der Luft: $s=60\,s\cdot 150\,m\,s^{-1}=9\,km$

$$\sin(\alpha)=\frac{h}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h}=s\sin(\alpha)=9\,km\cdot\sin(25\,°)\approx\mathbf{3{,}80\,km}$$

A: Das Flugzeug steigt 3,8 km hoch.

c) Berechne die während der Steigphase zurückgelegte Flugstrecke (überflogene Strecke auf dem Boden.)

$$\cos(\alpha)=\frac{f}{s} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}=s\cos(\alpha)=9\,km\cos(25\,°)\approx\mathbf{8{,}12\,km}$$

A: Das Flugzeug überfliegt eine Strecke von 8,12 km.

<u>Aufgabe 4:</u> *8 Punkte + 3 Bonuspunkte (3 + 5 + 3 Bonuspunkte)*

Admiral Nelson ist mit zweien seiner Schiffe in der Karibik. Das eine schickt er Richtung Kanaren, während er selbst Richtung Portugal aufbricht.Beide Schiffe fahren exakt geradeaus und mit exakt der gleichen Geschwindigkeit. Sie fahren in einem Winkel von 10° auseinander.

a) Beide Schiffe fahren exakt 1200 Seemeilen weit. Berechne die Entfernung der beiden Schiffe zu diesem Zeitpunkt.

Sei h die gesuchte Strecke

$$\sin(5°)=\frac{\frac{h}{2}}{1200\,sm} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{h}=2400\,sm\cdot\sin(5°)\approx\mathbf{209{,}17\,sm}$$

A: Sie sind ca. 210 Seemeilen voneinander entfernt.

b) Nelsons Pläne ändern sich jetzt (nach 1200 Seemeilen). Er muss das andere Schiff nun unbedingt erreichen. Er erhöht seine Geschwindigkeit und nachdem das andere Schiff 200 weitere Seemeilen gefahren ist, hat er es tatsächlich geschafft. Berechne, wie weit Nelson fahren musste, um das Schiff einzuholen.

Sei h_1 die senkrechte Strecke, welche das 2. Schiff während der 200 sm noch zurücklegt.

$$\sin(5°)=\frac{h_1}{200\,sm} \quad \Leftrightarrow \quad h_1=200\,sm\cdot\sin(5°)\approx 17{,}43\,sm$$

Sei s_1 die waagerechte Strecke, welche das 2. Schiff während der 200 sm noch zurücklegt.

$$\cos(13°)=\frac{s_1}{200\,sm} \quad \Leftrightarrow \quad s_1=200\,sm\cdot\cos(5°)\approx 199{,}24\,sm$$

$h_2=h+h_1=226{,}60\,sm$ ist die gesamte senkrechte Strecke, die Nelson zurücklegen muss.

Nelson muss von seinem Standpunkt aus 77,95 sm waagerecht und 226,60 sm senkrecht zurücklegen. Der direkte Weg ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit diesem beiden Katheten.
Sei c die gesuchte Strecke. $c^2=s_1^2+h_2^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{c}=\sqrt{s_1^2+h_2^2}\approx\mathbf{301{,}74\,sm}$

A: Nelson muss etwa 302 Seemeilen zurücklegen, bis er das Schiff einholt.

c) (Bonusaufgabe) Angenommen, beide Schiffe reisten zu Beginn mit der Geschwindigkeit von 6 Knoten. Berechne die Geschwindigkeit, die Nelson während seiner Verfolgung hatte.

Sei v die gesuchte Geschwindigkeit.

$$\frac{v}{6\,kn}=\frac{301{,}74\,sm}{200\,sm} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}=\frac{301{,}74\,sm}{200\,sm}\cdot 6\,kn=\mathbf{9{,}05\,kn}$$

A: Nelson musste seine Geschwindigkeit auf ca. 9 Knoten steigern.
<u>Aufgabe 5:</u> *10 Punkte (4 + 6)*

Mathematik Klasse 10a, 4. Klassenarbeit – Trigonometrie 1 – Lösung B 24.02.2011

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a,b und c, sowie den Winkeln α,β und γ.

a) $a=5\,cm;\alpha=50°;\gamma=75°$. Berechne b,c und β mit Hilfe des Sinussatzes.

$\boldsymbol{\beta}=180°-\alpha-\gamma=\mathbf{55°}$

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{c}=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=5\,cm\cdot\frac{\sin(75°)}{\sin(50°)}\approx\mathbf{6{,}30\,cm}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{b}=a\cdot\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}=5\,cm\cdot\frac{\sin(55°)}{\sin(50°)}\approx\mathbf{5{,}35\,cm}$$

Also $\boldsymbol{\beta=55°;b=5{,}35\,cm;c=6{,}30\,cm}$

b) $a=10\,cm;b=14\,cm;\beta=20°$. Berechne α, γ und c mit Hilfe des Sinussatzes.

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \quad\Leftrightarrow\quad \sin(\alpha)=\frac{a}{b}\cdot\sin(\beta)=\frac{10\,cm}{14\,cm}\cdot\sin(20°)\approx 0{,}2443 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha\approx 14{,}14°}$$

$\alpha_2=180°-\alpha\approx 165{,}86°$

$\boldsymbol{\gamma}=180°-\alpha-\beta\approx\mathbf{145{,}86°}$

$\gamma_2=180°-\alpha_2-\beta\approx -5{,}86°$ Das ist nicht möglich, also gibt es kein zweites Dreieck.

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{c}=a\cdot\frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}=3\,cm\cdot\frac{\sin(145{,}86°)}{\sin(14{,}14°)}\approx\mathbf{22{,}97\,cm}$$

Also $\boldsymbol{\alpha=14{,}14°;\gamma=145{,}86°;c=22{,}97\,cm}$