

Mathematik Klasse 9a, Übungszettel – Umformen zur Scheitelpunktsform 04.03.2010

Aufgabe 1: Gegeben ist eine quadratische Funktion in der Normalform $f(x) = x^2 - 10x + 2$.
Berechne den Scheitelpunkt der Parabel.

Lösung: Umwandeln in die Scheitelpunktsform $f(x) = (x-d)^2 + e$ und den Scheitelpunkt S(d|e) ablesen.

Dazu muss eine binomische Formel rückwärts angewendet werden. Allerdings steht in der Funktionsgleichung noch keine binomische Formel. Daher muss der Term $x^2 - 10x$ erst zu einer binomischen Formel ergänzt werden.

$$\text{Hier: } a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

Das a ist das x in der Funktionsgleichung und $10x$ sind entsprechend $2ab$.

Es fehlt also das b^2 , das mit der quadratischen Ergänzung addiert werden muss.

Wenn $10x = 2ab$, dann muss $b = 5$ sein und $b^2 = 25$.

Wir ergänzen also:

$$f(x) = x^2 - 10x + 25 - 25 + 2 \quad (-25, \text{ damit sich der Funktionsterm im Ergebnis nicht verändert.})$$

Jetzt binomische Formel rückwärts und vereinfachen:

$$f(x) = (x-5)^2 - 23$$

Antwort: Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (5|-23).

Aufgabe 2: Gegeben ist eine quadratische Funktion in der Form $f(x) = 2x^2 + 12x - 4$.
Berechne den Scheitelpunkt der Parabel.

Lösung: Umwandeln in die Scheitelpunktsform $f(x) = a(x-d)^2 + e$ und den Scheitelpunkt S(d|e) ablesen.

Das Verfahren funktioniert genauso wie in Aufgabe 1. Allerdings müssen wir zunächst dafür sorgen, dass das x^2 alleine und ohne Vorfaktor in der Gleichung steht. Dazu klammern wir den Vorfaktor aus:

$$f(x) = 2(x^2 + 6x) + 4$$

Nun die quadratische Ergänzung für den Term $x^2 + 6x$: Ergänze $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$, also

$$f(x) = 2(x^2 + 6x + 9 - 9) + 4$$

Binomische Formel rückwärts:

$$f(x) = 2((x+3)^2 - 9) + 4$$

Nun wieder ausmultiplizieren:

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 18 + 4$$

$$f(x) = 2(x+3)^2 - 14$$

Antwort: Der Scheitelpunkt S hat die Koordinaten (-3|-14).

Mathematik Klasse 9a, Übungszettel – Umformen zur Scheitelpunktsform 04.03.2010

Aufgabe 3: (Hausaufgabe)

<p>a) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$</p> $= -2(x^2 - 4x) - 5$ $= -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5$ $= -2((x-2)^2 - 4) - 5$ $= -2((x-2)^2 - 4) - 5$ $= -2(x-2)^2 + 8 - 5$ $= -2(x-2)^2 + 3$ <p>S(2 3)</p>	<p>b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x - 5$</p> $= -\frac{1}{4}(x^2 - 32x) - 5$ $= -\frac{1}{4}(x^2 - 32x + 256 - 256) - 5$ $= -\frac{1}{4}((x-16)^2 - 256) - 5$ $= -\frac{1}{4}(x-16)^2 + 64 - 5$ $= -\frac{1}{4}(x-16)^2 + 59$ <p>S(16 59)</p>
<p>c) $f(x) = 12x^2 - x + 20$</p> $= 12\left(x^2 - \frac{1}{12}x\right) + 20$ $= 12\left(x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{576} - \frac{1}{576}\right) + 20$ $= 12\left(\left(x^2 - \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{1}{576}\right) + 20$ $= 12\left(x^2 - \frac{1}{24}\right)^2 - \frac{1}{48} + 20$ $= 12\left(x^2 - \frac{1}{24}\right)^2 + \frac{959}{48}$ <p>S\left(\frac{1}{24} \mid \frac{959}{48}\right)</p>	<p>d) $f(x) = \frac{1}{10}x^2 + \frac{1}{100}x + \frac{1}{12}$</p> $= \frac{1}{10}\left(x^2 + \frac{1}{10}x\right) + \frac{1}{12}$ $= \frac{1}{10}\left(x^2 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{400} - \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{12}$ $= \frac{1}{10}\left(\left(x^2 + \frac{1}{20}\right)^2 - \frac{1}{400}\right) + \frac{1}{12}$ $= \frac{1}{10}\left(x^2 + \frac{1}{20}\right)^2 - \frac{1}{4000} + \frac{1}{12}$ $= \frac{1}{10}\left(x^2 + \frac{1}{20}\right)^2 - \frac{3}{12000} + \frac{1000}{12000}$ $= \frac{1}{10}\left(x^2 + \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{997}{12000}$ <p>S\left(-\frac{1}{20} \mid \frac{997}{12000}\right)</p>
<p>e) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 20$</p> <p>Ist eine um 20 nach oben verschobene gestauchte Normalparabel, also</p> <p>S(0 20)</p> <p>Scheitelpunktsform wäre</p> $f(x) = -\frac{1}{3}(x+0)^2 + 20$	<p>f) $f(x) = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{3}{7}x$</p> $= -\frac{1}{7}(x^2 - 3x)$ $= -\frac{1}{7}(x^2 - 3x + 2,25 - 2,25)$ $= -\frac{1}{7}\left((x-1,5)^2 - 2,25\right)$ $= -\frac{1}{7}(x-1,5)^2 + \frac{9}{28}$ <p>S\left(1,5 \mid \frac{9}{28}\right)</p>