Mathematik Klasse 9a, AB 11, Pythagoras, ... – Lösung **08.06.2010**

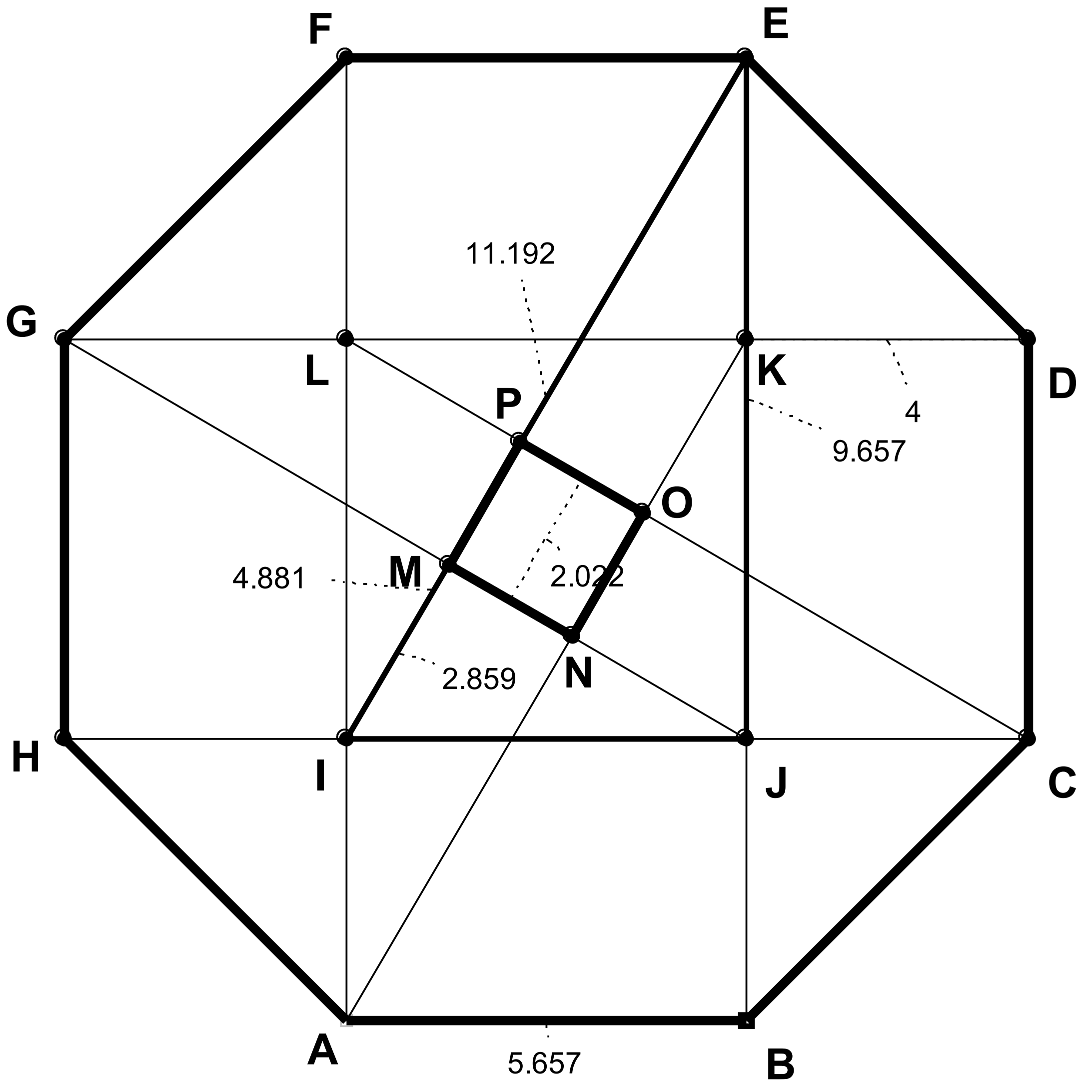
Aufgabe 1: Herr Claarsen ist Vertreter für Wunderkerzen der Firma Ignis. Die neueste Attraktion der Firma ist eine Riesenwunderkerze von 60 cm Länge. Herr Claarsen fragt sich natürlich, ob die Kerze in seinen Vertreterkoffer passt. Der Koffer ist 50 cm lang, 12 cm breit und 30 cm hoch.

Berechne, ob die neue Wunderkerze in Herrn Claarsens Koffer passt.

$$\boldsymbol{d^2=(50\,cm)^2+(12\,cm)^2+(30\,cm)^2 \Rightarrow d=59{,}53\,cm}$$

Die Wunderkerze passt nicht in den Koffer.

Aufgabe 2: Gegeben ist ein regelmäßige Achteck mit der Seitenkante $\overline{AB}=4\cdot\sqrt{2}\,cm$.



a) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks IJE

$A=\frac{1}{2}\overline{IJ}\cdot\overline{EJ}$ $\overline{IJ}=\overline{AB}=4\cdot\sqrt{2}\,cm$ ist bekannt.

$\overline{EJ}=\overline{KJ}+\overline{EK} \qquad \overline{KJ}=\overline{AB}=4\cdot\sqrt{2}\,cm$

Zur Berechnung von $\overline{EK}$ betrachte das rechtwinklige Dreieck KDE.

$\overline{EK}^2+\overline{KD}^2=\overline{ED}^2$; $\overline{KD}=\overline{EK}$, $\overline{ED}=\overline{AB}=4\cdot\sqrt{2}\,cm$ weil regelmäßiges Achteck. Also

$\Rightarrow 2\,\overline{EK}^2=\left(4\cdot\sqrt{2}\,cm\right)^2 \quad |:2$

$\Leftrightarrow \overline{EK}^2=\frac{32\,cm^2}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{EK}^2=16\,cm^2 \quad | \quad \sqrt{}$

$\Rightarrow \overline{EK}=4\,cm$

$\overline{EJ}=\overline{KJ}+\overline{EK}=4\cdot\sqrt{2}\,cm+4\,cm\approx 9{,}66\,cm$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}\,cm\cdot\left(4\cdot\sqrt{2}\,cm+4\,cm\right)=\frac{1}{2}\left(16\cdot 2\,cm^2+16\cdot\sqrt{2}\,cm^2\right)$$
$$\approx\frac{1}{2}(32+22{,}63)\,cm^2=\frac{1}{2}\cdot 54{,}63\,cm^2=\mathbf{27{,}31\,cm^2}$$

b) Berechne die Fläche des Quadrats MNOP.

Kathetensatz für das Dreieck IJE: $\overline{IJ}^2=\overline{\mathrm{IM}}\cdot\overline{IE}$

$\Leftrightarrow \overline{\mathrm{IM}}=\frac{\overline{IJ}^2}{\overline{IE}}$ Zur Berechnung von $\overline{IE}$ Pythagoras benutzen:

$$\overline{IE}^2=\overline{IJ}^2+\overline{JE}^2=\left(4\cdot\sqrt{2}\,cm\right)^2+\left(4\cdot\sqrt{2}\,cm+4\,cm\right)^2=16\cdot 2\,cm^2+16\cdot 2\,cm^2+2\cdot 4\cdot\sqrt{2}\,cm\cdot 4\,cm+16\,cm^2$$
$$=32\,cm^2+32\,cm^2+32\cdot\sqrt{2}\,cm^2+16\mathrm{cm}^2=\left(80+32\cdot\sqrt{2}\right)cm^2\approx 125{,}25\,cm^2$$

$\Rightarrow \overline{IE}=\sqrt{80+32\cdot\sqrt{2}\,cm}\approx 11{,}19\,cm$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathrm{IM}}=\frac{\overline{IJ}^2}{\overline{IE}}=\frac{16\cdot 2\,cm^2}{\sqrt{80+32\cdot\sqrt{2}\,cm^2}}\approx 2{,}86\,cm$$

Betrachte das Dreieck ILP. Satz des Pythagoras:

$\overline{IL}^2=\overline{LP}^2+\overline{IP}^2$

Wegen der Symmetrie des regelmäßigen Achtecks gilt: $\overline{LP}=\overline{\mathrm{IM}}$. Damit

$$\overline{IP}^2=\overline{IL}^2-\overline{\mathrm{IM}}^2=32\,cm^2-\frac{32^2\,cm^4}{80+32\cdot\sqrt{2}\,cm^2}\approx 23{,}82\,cm^2$$

$\Rightarrow \overline{IP}\approx 4{,}88\,cm$

$\overline{PM}=\overline{IP}-\overline{\mathrm{IM}}\approx 2{,}02\,cm$

$\boldsymbol{A}=\overline{PM}^2\approx\mathbf{4{,}09\,cm^2}$

Mathematik Klasse 9a, AB 11, Pythagoras, ... – Lösung **08.06.2010**

Aufgabe 3:

Apu war Malermeister im alten Ägypten. Er lebte in Gizeh in direkter Nachbarschaft der großen Pyramiden. Diese waren früher verkleidet, hatten glatte Seitenflächen, und waren weiß gekalkt. Ab und zu musste die weiße Farbe erneuert werden. Nun bekam Apu eines Tages den Auftrag seines Lebens. Er sollte die große Pyramide des Cheops neu weißen. Apu kalkuliert 2 Rupien pro Quadratmeter. Die Pyramide hatte eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 230,33 m und sie war 146,59 m hoch.

Wie viel Rupien berechnet Apu für den Auftrag?

Seitenkante a = 230,33 m; Höhe h = 146,59 m

Höhe h_s eines Dreiecks der Oberfläche: $h_s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2$

$$h_s^2 = 13262{,}977225\,cm^2 + 21488{,}6281\,cm^2 = 34751{,}605325\,cm^2 \quad | \quad \sqrt{}$$

$$h_s \approx 186{,}42\,cm$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s \approx 21468{,}81\,cm^2$$

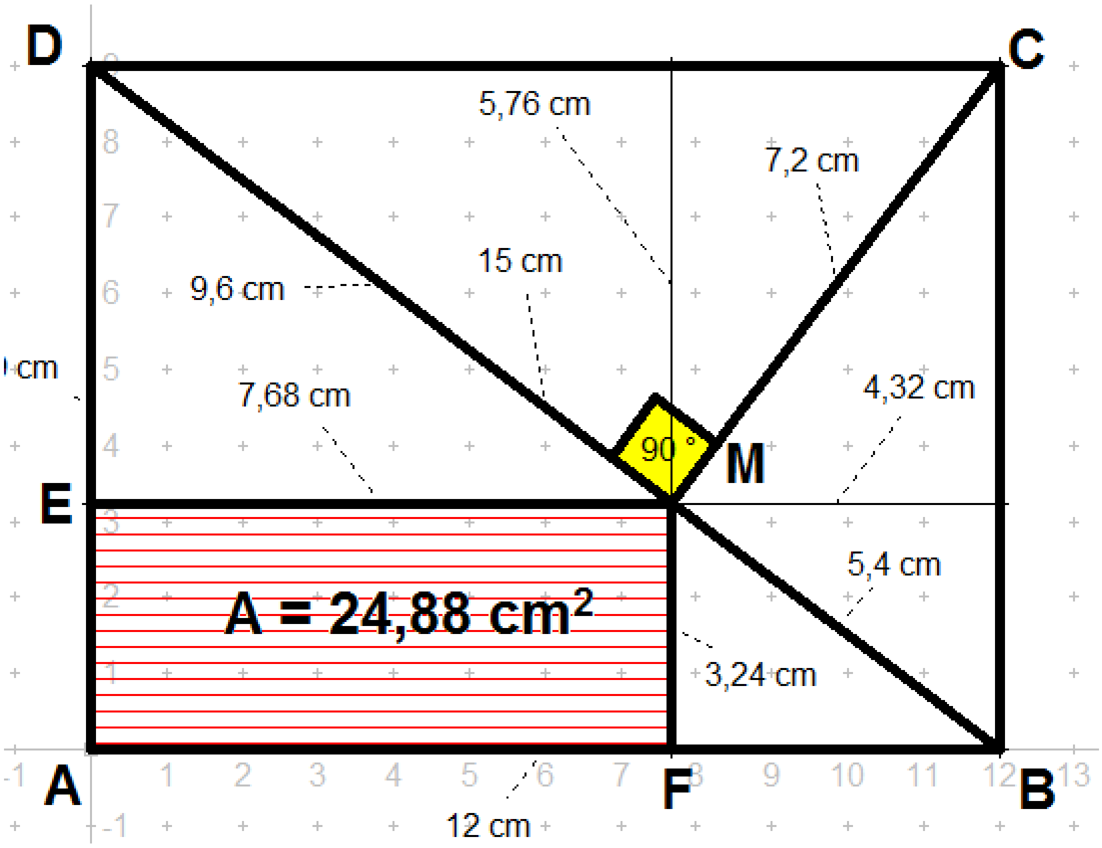
$$A_{ges} = 4 \cdot A = 85875{,}24\,cm^2$$

Betrag Rupien $\boldsymbol{R} = 2\frac{Rupien}{m^2} \cdot A_{Ges} = \mathbf{171750{,}47}\ \boldsymbol{Rupien}$

A: Apu berechnet 171.750,47 Rupien.

Aufgabe 4:

Gegeben ist das Rechteck ABCD mit den Maßen $\overline{AB} = 12\,cm$ und $\overline{AD} = 9\,cm.$



Erst die Diagonale $\overline{BD}$ berechnen, dann die Hypotenusenabschnitte, dann die Höhen der Dreiecke DMC und MBC mit dem Höhensatz und damit die Seitenlängen des gesuchten Rechtecks.

Berechne den Flächeninhalt des grauen Rechtecks.

$\overline{BD} = 15\,cm$, $\overline{DM} = 9{,}6\,cm$, $\overline{MB} = 5{,}4\,cm$, $\overline{MC} = 7{,}2\,cm$

$\overline{FB} = 4{,}32\,cm$, $\overline{MF} = 3{,}24\,cm$, $\overline{EM} = 7{,}68\,cm$, $\Rightarrow A = 24{,}88\,cm^2$