

Bei Rechenaufgaben die Aufgaben jeweils ins Heft übertragen. Bei Textaufgaben sind Antwortssätze zu schreiben. Auf den Formalismus bei den LGS achten! Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner

Aufgabe 1: Beschreibe die folgenden Parabel, in dem du den Scheitelpunkt angibst, ob sie enger oder weiter als die Normalparabel ist, und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.
(2 + 3 + 4 Punkte)

a) $f(x) = -2x^2$

S(0|0). Die Parabel ist nach unten geöffnet und enger als die Normalparabel. 2 Punkte

b) $p(x) = x^2 + 20x$
 $= x^2 + 20x + 100 - 100$
 $= (x + 10)^2 - 100$

3 Punkte

S(-10|-100). Die Parabel ist nach oben geöffnet und genauso weit wie die Normalparabel.

c) $q(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$
 $= -\frac{1}{8}(x^2 - 4x) - 2$
 $= -\frac{1}{8}(x^2 - 4x + 4 - 4) - 2$
 $= -\frac{1}{8}((x - 2)^2 - 4) - 2$
 $= -\frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{2} - 2$
 $= -\frac{1}{8}(x - 2)^2 - 1,5$

4 Punkte

S(2|-1,5). Die Parabel ist nach unten geöffnet und weiter als die Normalparabel.

Aufgabe 2: Eine Parabel p schneidet die x-Achse bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 4$ sowie die y-Achse beim Wert $y_1 = -8$. (5 + 4 Punkte)

a) Zeige mit einer Rechnung, dass die Funktionsgleichung der Parabel $p(x) = 2x^2 - 6x - 8$ ist.

Drei Punkte der Parabel sind gegeben: $P_1(-1|0)$, $P_2(4|0)$, $P_3(0|-8)$. Eingesetzt in die Funktionsgleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$:

I. $0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
 II. $0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$
 III. $-8 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

I. $0 = a - b + c$ | setze $c = -8$ ein
 II. $0 = 16a + 4b + c$ | setze $c = -8$ ein

III. $-8 = c$

Ia. $0 = a - b - 8$ | setze a = 2 ein

IIa. $0 = 16a + 4b - 8$ | IIa. + 4 Ia.

IIb. $0 = 20a - 40$ | +40

$\Leftrightarrow 40 = 20a$ | : 20

$\Leftrightarrow 2 = a$

Ib. $0 = 2 - b - 8$ | -6

$\Leftrightarrow -6 = b$

Also $a = 2$, $b = -6$ und $c = -8$, somit $p(x) = 2x^2 - 6x - 8$

5 Punkte

b) Berechne die Schnittpunkte der Geraden $g(x) = -6 \cdot (x - 64)$ mit der Parabel p.

Gleichsetzen der Funktionsgleichungen $p(x_s) = g(x_s)$

$2x^2 - 6x - 8 = -6 \cdot (x - 64)$ | T

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - 8 = -6x + 384$ | + 6x + 8

$\Leftrightarrow 2x^2 = 392$ | :2

$\Leftrightarrow x^2 = 196$ | $\sqrt{\quad}$

$\Rightarrow x_1 = -14$

$\Rightarrow x_2 = 14$

Berechnen der y-Koordinaten:

$g(x_1) = -6 \cdot (-14 - 64) = -6 \cdot (-78) = 468$

$g(x_2) = -6 \cdot (14 - 64) = -6 \cdot (-50) = 300$

Die Schnittpunkte haben die Koordinaten $(-14|468)$ und $(14|300)$.

4 Punkte

Aufgabe 3: Ein Auto, das gleichmäßig beschleunigt wird, legt den Weg s in der Zeit t nach folgender Formel zurück. $s = \frac{1}{2} a t^2$. Die Beschleunigung beträgt 6 Meter pro Quadratsekunden $a = 6 \frac{m}{s^2}$ (Die Einheit s für Sekunde nicht mit der Größe s für Weg verwechseln)

a) Berechne den Weg s_1 , den das Auto nach einer halben Minute zurückgelegt hat.

$s = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{m}{s^2} (30 s)^2 = 3 \frac{m}{s^2} \cdot 900 s = 2700 m$

A: Das Auto legt 2,7 km zurück.

2 Punkte

b) Berechne die Zeit t_2 , die das Auto braucht, um die Strecke $s_2 = 1$ km zurückzulegen.

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \quad | \cdot \frac{2}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2s}{a} = t^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$\Leftrightarrow t = \pm \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad \text{Nun } s = 1000 \text{ m und } a = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ einsetzen}$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \text{ m}}{6 \text{ m/s}^2}}$$

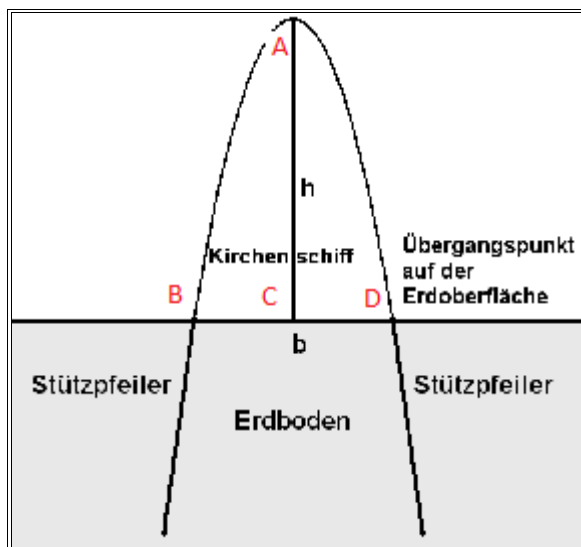
$$t = \pm 18,26 \text{ s}$$

Eine negative Zeit kann nicht die Lösung sein, also

A: Das Auto braucht 18,26 Sekunden, um einen Kilometer zurückzulegen.

3 Punkte

Aufgabe 4: Die Parabelkirche in Gelsenkirchen wurde von dem Architekten Josef Franke in den Jahren 1927-1929 erbaut. Das Kirchenmittelschiff hat die Höhe $h = 15$ m und die Breite $b = 10$ m. (6 + 3 Punkte)



Die Parabelkirche in Gelsenkirchen

Skizze des Kirchenschiffes

a) Stelle eine Funktionsgleichung auf, nach welcher das Kirchenmittelschiff hätte konstruiert werden können.

Um drei Punkte ablesen zu können, muss ein Koordinatensystem bestimmt werden. Vier mögliche Punkte für den Koordinatenursprung sind eingezeichnet.

Punkt A im Scheitelpunkt der Parabel:

Dann sind die drei Punkte $P_1(0|0)$, $P_2(-5|-15)$, $P_3(5|-15)$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \text{II.} & \quad -15 = a \cdot (-5)^2 + b \cdot (-5) + c \\ \text{III.} & \quad -15 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad 0 = c \\ \text{II.} & \quad -15 = 25a - 5b + c \\ \text{III.} & \quad -15 = 25a + 5b + c \quad | \text{ II} + \text{III} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IIIa.} & \quad -30 = 50a \quad | :50 \\ & \quad \Leftrightarrow -\frac{3}{5} = a \end{aligned}$$

Setze $a = -\frac{3}{5}$ in II ein:

$$\begin{aligned} \text{II.} & \quad -15 = 25 \left(-\frac{3}{5} \right) - 5b + 0 \quad | \text{ T} \quad \ddot{a} \\ & \quad \Leftrightarrow -15 = -15 - 5b \quad | +15 \\ & \quad \Leftrightarrow 0 = -5b \quad | :(-5) \\ & \quad \Leftrightarrow 0 = b \end{aligned}$$

Also $a = -\frac{3}{5}$, $b = 0$ und $c = 0$, somit $f(x) = -\frac{3}{5}x^2$

6 Punkte

Punkt B: Dann sind die drei Punkte $P_1(0|0)$, $P_2(5|15)$, $P_3(10|0)$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \text{II.} & \quad 15 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \\ \text{III.} & \quad 0 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad 0 = c \\ \text{II.} & \quad 15 = 25a + 5b + c \quad | \text{ setze } c = 0 \text{ ein} \\ \text{III.} & \quad 0 = 100a + 10b + c \quad | \text{ setze } c = 0 \text{ ein} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IIa.} & \quad 15 = 25a + 5b \\ \text{IIIa.} & \quad 0 = 100a + 10b \quad | \text{ IIIa.} - 2 \text{ IIa.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IIIb.} & \quad -30 = 50a \quad | :50 \\ & \quad \Leftrightarrow -\frac{3}{5} = a \end{aligned}$$

Setze $a = -\frac{3}{5}$ in IIIa. ein:

$$\begin{aligned} \text{IIIa.} \quad 0 &= 100 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 10b && | \text{ T} \\ \Leftrightarrow 0 &= -60 + 10b && | + 60 \\ \Leftrightarrow 60 &= 10b && | :10 \\ \Leftrightarrow 6 &= b \end{aligned}$$

Also $a = -\frac{3}{5}$, $b = 6$ und $c = 0$, somit $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x$

Punkt C: $P_1(-5|0)$, $P_2(0|15)$, $P_3(5|0)$. $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 15$

Punkt D: $P_1(-10|0)$, $P_2(-5|15)$, $P_3(0|0)$. $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 - 6x$

b) Zwei Meter von der Wand entfernt hängt ein Kronleuchter an 3 Meter langen Seilen von der Decke. Berechne, in welcher Höhe der Kronleuchter hängt.

Bei allen drei Funktionsgleichungen kommt das gleiche Ergebnis heraus.

Hier: $f(x) = -\frac{3}{5}x^2$

2 Meter von der Wand entfernt bedeutet für dieses Koordinatensystem: 3 m vom Koordinatenursprung entfernt. Da nicht gesagt wurde, ob die Wand links oder rechts gemeint ist, können wir entweder +3 oder -3 für x einsetzen.

$$f(x_1) = -\frac{3}{5} \cdot 3^2 = -\frac{27}{5} = -5,4 \quad . \text{ Die Deckenhöhe beträgt hier also } 15 \text{ m} - 5,4 \text{ m} = 9,6 \text{ m.}$$

A: Der Kronleuchter hängt in 6,6 m Höhe.

3 Punkte