Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung N 26.05.2010

Aufgabe 1: *4 + 5 Punkte*

Berechne die fehlenden Werte von sin(α), cos(α) und tan(α) unter Benutzung der bekannten Umformungsregeln. Der Lösungsweg über die Berechnung des Winkels α ist nicht zulässig.

a) $\sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ $\Rightarrow\cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$ einsetzen: $\mathbf{\cos(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\mathbf{\tan(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{1}$	**b)** $\tan(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}}$ | ² $\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)}$ | $\cdot(1-\sin^2(\alpha))$ $\Leftrightarrow 0{,}5(1-\sin^2(\alpha))=\sin^2(\alpha)$ | T $\Leftrightarrow 0{,}5(1-\sin^2(\alpha))=\sin^2(\alpha)$ $\Leftrightarrow 0{,}5-0{,}5\sin^2(\alpha)=\sin^2(\alpha)$ | $+0{,}5\sin^2(\alpha)$ $\Leftrightarrow 0{,}5=1{,}5\sin^2(\alpha)$ | :1,5 $\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\sin^2(\alpha)$ | $\sqrt{\ }$ $\Rightarrow\mathbf{\sin(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ $\mathbf{\cos(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}=\mathbf{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

Aufgabe 2: 3 + *3 + 4 Punkte*

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich

a) $\frac{1-\sin^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\frac{\cos^2(\alpha)}{\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}=\frac{\cos^3(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

b) $\sin^4(\alpha)-\cos^4(\alpha)=(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))(\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha))=\mathbf{\sin^2(\alpha)-\cos^2(\alpha)}$

c)

$$\frac{\tan(\alpha)\cdot(1-\cos^2(\alpha))+\tan(\alpha)\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\tan(\alpha)\cdot\sin^2(\alpha)+\tan(\alpha)\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

$$=\tan(\alpha)\cdot\frac{2\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot 2\sin(\alpha)=\mathbf{\frac{2\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung N 26.05.2010

Aufgabe 3: Skizziere – ohne Benutzung des Taschenrechners – die Funktion $f(x) = -2 \cdot \sin(x)$ im Wertebereich von -π bis +2π. Trage alle Funktionswerte im Abstand von $\frac{\pi}{6}$ auf der x-Achse ein und außerdem bei Vielfachen von $\frac{\pi}{4}$. Stelle zunächste eine Wertetabelle auf. Benutze die bekannten Sinuswerte und außerdem: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$; $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

(8 Punkte, davon 4 Punkte für Genauigkeit/Sauberkeit)

Aus dem Zusammenhang $\sin(\alpha) = \cos(\pi - \alpha)$ *die fehlenden Sinuswerte ermitteln und Graphen zeichnen.*

Aufgabe 4: Die Sinus- und Kosinusfunktion stehen über die sogenannten Additionssätze miteinander in Beziehung. Die Additionssätze für beliebige Winkel α und β lauten:

(3 Punkte + 5 Punkte)

1. $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Beweise mit Hilfe der Additionssätze, dass gilt:

a) $\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha)$

$$\mathbf{\sin(90° - \alpha)} = \sin(90°)\cos(\alpha) - \cos(90°)\sin(\alpha) = 1 \cdot \cos(\alpha) - 0 \cdot \sin(\alpha) = \mathbf{\cos(\alpha)}$$

b) $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$

$$\mathbf{\sin(3\alpha)} = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin(\alpha)\cos(2\alpha) + \cos(\alpha)\sin(2\alpha)$$

$$= \sin(\alpha)\left(\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\right) + \cos(\alpha) \cdot 2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$= \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha)$$

$$= 3\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

$$= 3\sin(\alpha)\left(1 - \sin^2(\alpha)\right) - \sin^3(\alpha)$$

$$= 3\sin(\alpha) - 3\sin^3(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

$$\mathbf{= 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)}$$