Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung A 07.05.2010

Aufgabe 1: *4 + 5 Punkte*

Berechne die fehlenden Werte von sin(α), cos(α) und tan(α) unter Benutzung der bekannten Umformungsregeln. Der Lösungsweg über die Berechnung des Winkels α ist nicht zulässig.

a) $\sin(\alpha)=\frac{1}{2}$

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$$
$$\Rightarrow \cos(\alpha)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}$$

einsetzen:

$$\mathbf{\cos(\alpha)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\mathbf{\tan(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

b) $\tan(\alpha)=\sqrt{2}$ $\quad \tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$$\sqrt{2}=\frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2(\alpha)}} \quad | ^2$$

$$\Rightarrow 2=\frac{\sin^2(\alpha)}{1-\sin^2(\alpha)} \quad | \cdot\left(1-\sin^2(\alpha)\right)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2(\alpha)\right)=\sin^2(\alpha) \quad | \text{T}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2(\alpha)\right)=\sin^2(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 2-2\sin^2(\alpha)=\sin^2(\alpha) \quad | +2\sin^2(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 2=3\sin^2(\alpha) \quad | :3$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}=\sin^2(\alpha) \quad | \sqrt{}$$
$$\Rightarrow \mathbf{\sin(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$$\mathbf{\cos(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{2}=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Aufgabe 2: *1 + 2 + 3 Punkte*

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich

a) $$\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}=\sin(\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\mathbf{\cos(\alpha)}$$

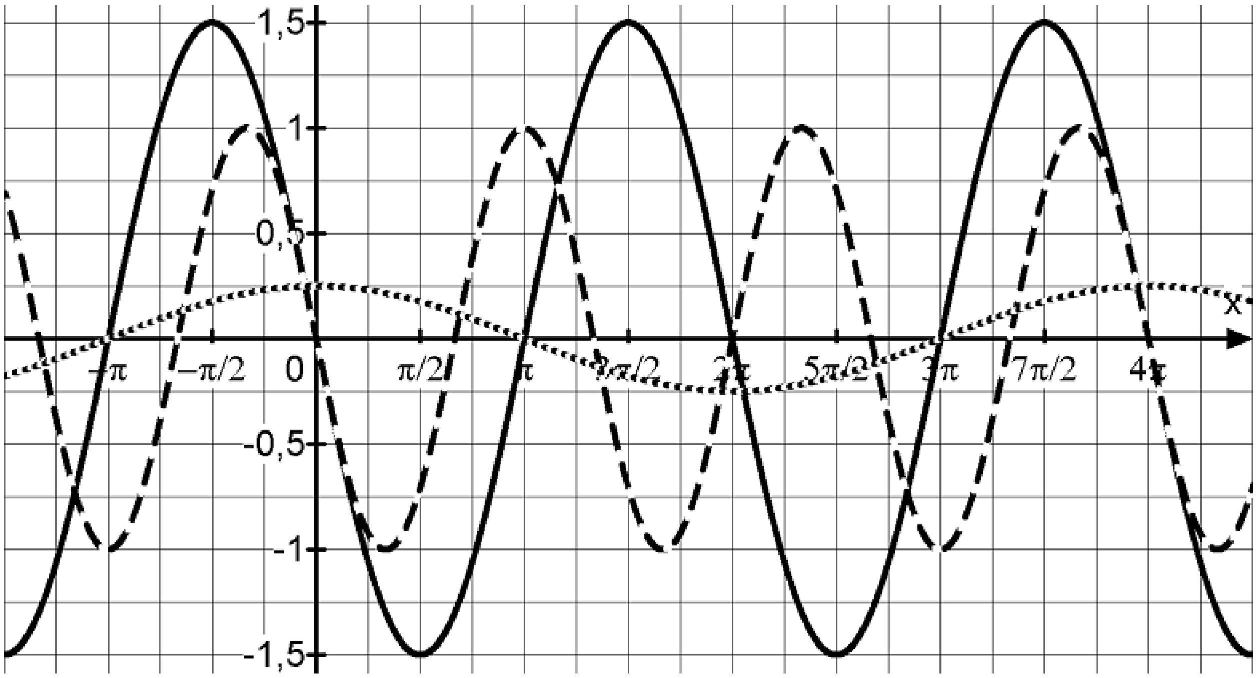
b) $$\frac{1-\cos^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}=\frac{\sin^2(\alpha)}{\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}=\sin^2(\alpha)\cdot\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\mathbf{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

c) $$\frac{\tan(\alpha)\cos^2(\alpha)+\tan(\alpha)\sin^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\tan(\alpha)\cdot\frac{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha)}=\mathbf{\frac{1}{\cos(\alpha)}}$$

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung A 07.05.2010

<u>Aufgabe 3:</u> *6 + 6 Punkte*

Gegeben sind drei Graphen von Funktionen der Form $f(x) = a \cdot \sin(bx - e)$



a) Gib für alle drei Graphen die Periode und die Phasenverschiebung an.

durchgezogen: $p = 2\pi$, $e = \frac{p}{2} = +\pi$ (oder $e = -\pi$ oder e = 0, wenn a<0 gewählt)

gestrichelt: $p = \frac{4}{3}\pi$, $e = \frac{p}{2} = +\frac{2}{3}\pi$ (oder $e = -\frac{1}{3}\pi$ oder e = 0, wenn a<0 gewählt)

punktiert: $p = 4\pi$, $e = \frac{p}{4} = -\pi$ (oder $e = +3\pi$)

b) Gib für alle drei Graphen die Funktionsgleichung an.

durchgezogen: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \quad \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(x - \pi)}$

gestrichelt: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = \sin(1{,}5x - \frac{2}{3}\pi)}$

punktiert: $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boldsymbol{f(x) = 0{,}25 \sin(0{,}5x + \pi)}$

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung A 07.05.2010

Aufgabe 4: *3 + 4 Punkte*

Ein Federpendel besteht aus einer Feder mit einem angehängten Gewicht. Lässt man die Feder ruhig hängen, nennt man die Position des Gewichts "Gleichgewichtslage" bzw. "Ruhelage".

Die Schwingung eines Federpendels lässt sich mit folgender Gleichung beschreiben:

$$y(t)=y_0\sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t\right)$$

Diese Funktionsgleichung gibt die Auslenkung *y* (Entfernung von der Gleichgewichtslage) in Abhängigkeit von der Zeit *t* an. Dabei ist *D* die Federhärte und *m* die Masse des Gewichtes, dass unten an der Feder hängt.

Das Gewicht wird 0,15 m nach unten gezogen und losgelassen. Sobald es die Gleichgewichtslage passiert, beginnt die Zeit zu laufen.

$$D=40\,N/m\,,\,m=0{,}2\,kg$$

Hinweis: Es darf ohne Einheiten gerechnet werden.

a) Berechne die Auslenkung in Meter zum Zeitpunkt *t = 4* Sekunden.

$y_0=0{,}15\,m$ Alles einsetzen:

$$\boldsymbol{y(4)}=0{,}15\sin\left(\sqrt{\frac{40}{0{,}2}}\cdot 4\right)\approx\mathbf{0{,}003}$$

A: Die Auslenkung beträgt ca. 0,3 cm.

b) Berechne die Periodendauer T in Sekunden.

Die Gleichung hat die Form*:* $f(t)=a\cdot\sin(bt-e)$

Hier ist $b=\sqrt{\frac{D}{m}}=\sqrt{\frac{40}{0{,}2}}=\sqrt{200}$

$$\boldsymbol{T}=2\frac{\pi}{b}=\frac{2\pi}{\sqrt{200}}\approx\mathbf{0{,}4443}$$

A: Die Schwingungsdauer beträgt ca. 0,44 s.

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 5. Klassenarbeit – Trigonometrie – Lösung A 07.05.2010

Aufgabe 5: *4 + 4 Punkte*

Die Sinus- und Kosinusfunktion stehen über die sogenannten Additionssätze miteinander in Beziehung. Die Additionssätze lauten:

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$
2. $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$
3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$
4. $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

Beweise mit Hilfe der Additionssätze, dass gilt:

a) $\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

Ansatz: $2\alpha=\alpha+\alpha$, dann 1. Additionssatz anwenden

$$\mathbf{\sin(2\alpha)}=\sin(\alpha+\alpha)=\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\alpha)=\mathbf{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

b) $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$

Ansatz: $\alpha=0-(-\alpha)$, dann 4. Additionssatz anwenden

$$\mathbf{\cos(\alpha)}=\cos(0-(-\alpha))=\cos(0)\cos(-\alpha)+\sin(0)\sin(-\alpha)=1\cos(-\alpha)+0\sin(-\alpha)=\mathbf{\cos(-\alpha)}$$