Mathematik Klasse 10 a/b/c, 3. KA – Flächen und Körper – Lösung N **01.03.2010**

Rechenaufgaben jeweils ins Heft übertragen. Alle Rechenschritte angeben. Bitte auf zwei Stellen runden. Rundungsfehler führen zu Punktabzug. Bei Textaufgaben sind Antwortssätze zu schreiben.

N

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner.

<u>**Aufgabe 1:**</u> *3 Punkte*

Ein Quadrat mit der Kantenlänge d hat den gleichen Flächeninhalt wie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge *a = 7 cm.* Bestimme *d*.

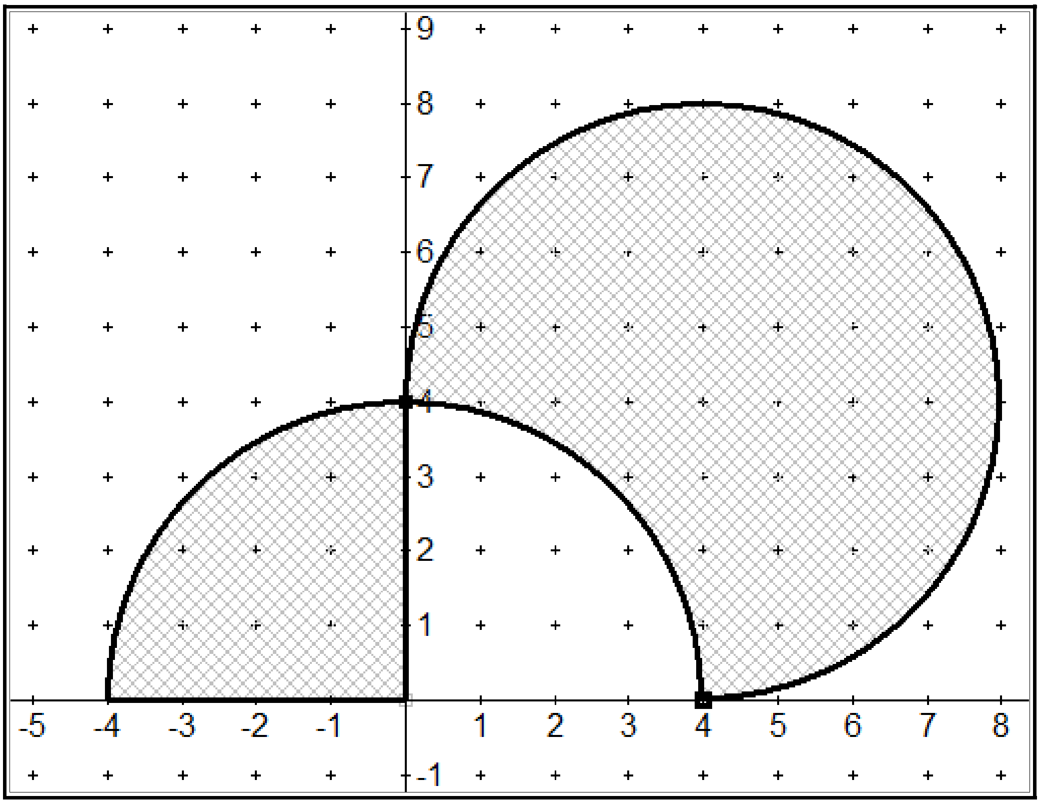
Herleitung Formel gleichseitiges Dreieck: $A_D = \frac{1}{2} a\, h_a$

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$, damit $A_D = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$A_Q = A_D \quad \Leftrightarrow d^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \quad \Leftrightarrow d = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} a = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \cdot 7\,cm = 4{,}61\,cm$$

<u>**Aufgabe 2:**</u> 5 *Punkte*

Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der schraffierten Figur in Zeichnung 1.



Zeichnung 1

Fläche: $A = A_{Viertelkreis} + A_{Dreiviertelkreis} + A_{Rest}$

Der Radius für alle Teilfiguren beträgt jeweils r = 4.

$$A_V = \frac{1}{4} \cdot \pi \, r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \, 4^2 = 12{,}57$$

$$A_{DV} = \frac{3}{4} \cdot \pi \, r^2 = \frac{3}{4} \cdot \pi \, 4^2 = 37{,}70$$

Rest ist ein Quadrat mit a = r von dem ein Viertelkreis abgezogen wird.

$$A_R = A_Q - A_V = r^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \, r^2 = r^2 (1 - \frac{1}{4} \pi) = 4^2 - (1 - \frac{1}{4} \pi) = 3{,}43$$

$$\boldsymbol{A} = A_V + A_{DV} + A_R = \frac{1}{4} \cdot \pi \, 4^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi \, 4^2 + a^2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \, r^2 = 4^2 + \frac{3}{4} \cdot \pi \, 4^2 = r^2 (1 + \frac{3}{4} \pi) = \mathbf{53{,}70}$$

Umfang: $U = U_{Viertelkreis} + U_{Dreiviertelkreis}$

Entweder einzeln berechnen

$$U_V = \frac{1}{4} \cdot 2 \pi \, r + 2 \, r = \frac{\pi}{2} r + 2 \, r = \frac{\pi}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 2 \pi + 8 = 6{,}28 + 8 = 14{,}28$$

$$U_{DV} = 2 \pi \, r = 2 \pi \, 4 = 25{,}13$$

und dann addieren:

$$\boldsymbol{U} = U_V + U_{DV} = 14{,}28 \, cm + 25{,}13 \, cm = \mathbf{39{,}41} \, \boldsymbol{cm}$$

Aufgabe 3: 5 + *5 Punkte*

Eine Pyramide und ein Kegel haben die Grundfläche *G*, die Mantelfläche *M*, die Oberfläche *O*, die Höhe *h* und die Seitenkante *s*. Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Kantenlänge *a.*

a). Berechne *s* und h des Kegels, wenn *O = 50 cm²* und *G = 20 cm²*.

$$G = \pi \, r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{G}{\pi}} = 2{,}52 \, cm \qquad M = O - G = 50 \, cm^2 - 20 \, cm^2 = 30 \, cm^2$$

$$M = \pi \, r \, s$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{s} = \frac{M}{\pi \, r} = \frac{30 \, cm^2}{\pi \cdot 2{,}52 \, cm} = \mathbf{3{,}78} \, \boldsymbol{cm}$$

$$r^2 + h^2 = s^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{h} = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{3{,}78^2 \, cm^2 - 2{,}52^2 \, cm^2} = \sqrt{7{,}97 \, cm^2} = \mathbf{2{,}82} \, \boldsymbol{cm}$$

b) Berechne M und h der <u>Pyramide</u>, wenn a = *4 cm* und s = 6 cm.

$$M = 4 \cdot A_D = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_a \qquad \left(\frac{1}{2} a\right)^2 + h_a^2 = s^2$$ *, damit*

$$h_a = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{36\,cm^2 - \frac{16\,cm^2}{4}} = \sqrt{32\,cm^2} = 5{,}66\,cm$$

$$\boldsymbol{M} = 2 \cdot 4\,cm \cdot 5{,}66\,cm = \mathbf{45{,}25\,cm^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} a\right)^2 + h^2 = h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{h} = \sqrt{h_a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{5{,}66^2\,cm^2 - 4^2 \frac{cm^2}{4}} = \sqrt{28{,}04\,cm^2} = \mathbf{5{,}29\,cm}$$

<u>Aufgabe 4:</u> 3 + *5 Punkte*

Ein Körper schimmt im Wasser, wenn seine Masse kleiner oder gleich der Masse des verdrängten Wassers ist. (Dichte von Wasser: ρ_W =1 kg/dm³).

Hannes baut ein Floß aus 8 Baumstämmen, die 2 m lang sind und einen Durchmesser von d = 25 cm haben.
(siehe Abbildung)
Das verwendete Fichtenholz hat eine Dichte von
ρ_H = 470 kg/m³.

Die Verbindungsseile haben insgesamt ein Volumen von 10 dm³ und wiegen m_S = 8 kg.

a) Berechne das Gesamtvolumen des Floßes.

V_F = V_Baumstämme + V_Seile

Die 8 Baumstämme haben die Form eines Zylinders mit dem Radius $r = \frac{d}{2} = 12{,}5\,cm = 1{,}25\,dm$ und der Höhe $h = 2\,m = 20\,dm.$

$$V_B = 8 \cdot \pi\, r^2 h = 8 \cdot \pi\, 1{,}25^2\,dm^2 \cdot 20\,dm = 785{,}40\,dm^3$$

$$\boldsymbol{V_F} = V_B + 10\,dm^3 = \mathbf{795{,}40\,dm^3}$$

A: Das Floß hat ein Volumen von ca. 795 Liter.

b) Berechne, wie viel Gewicht das Floß tragen kann, bevor es unter Wasser gedrückt wird.

Das Floß verdrängt 795,40 dm³ Wasser. Somit ist beträgt die Masse des verdrängten Wassers

$$m_W = V_F \cdot \rho_w = 795{,}40\, dm^3 \cdot 1 \frac{kg}{dm^3} = 795{,}40\, kg$$

Jetzt noch die Masse des Floßes berechnen. Die Differenz ist dann das zuladbare Gewicht.

$m_F = m_B + m_S$ (Masse der Baumstämme plus Masse der Seile)

Umrechnen der Dichte des Holzes auf dm³: $\rho_H = 470 \frac{kg}{m^3} = 470 \frac{kg}{10\, dm \cdot 10\, dm \cdot 10\, dm} = 0{,}47 \frac{kg}{dm^3}$

$$m_B = V_B \cdot \rho_H = 795{,}40\, dm^3 \cdot 0{,}47 \frac{kg}{dm^3} = 373{,}84\, kg.$$

$$m_F = 373{,}84\, kg + 8\, kg = 381{,}84\, kg$$

Zuladung $\boldsymbol{m} = m_W - m_F = 795{,}40\, kg - 381{,}84\, kg = \mathbf{413{,}56}\, \boldsymbol{kg}$

A: Das Floß kann rund 413 kg zuladen.

<u>**Aufgabe 5:**</u> *2 + 4 Punkte*

Eine Halbkugel, ein Kegel und ein Zylinder haben den gleichen Radius r und das gleiche Volumen V.

a) Berechne die Höhe h des Zylinders in Abhängigkeit von r.

$V_H = \frac{1}{2} V_{Kugel} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ $\quad V_Z = \pi r^2 h_Z$ Gleichsetzen:

$V_Z = V_H \quad \pi r^2 h_Z = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad | \quad : \pi r^2 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{h_Z = \frac{2}{3} r}$

b) Berechne die Höhe h und die Seitenkante s des Kegels in Abhängigkeit von r.

$V_K = \frac{1}{3} \pi r^2 h_K$ Gleichsetzen:

$V_K = V_H \quad \pi \frac{1}{3} r^2 h_K = \frac{2}{3} \pi r^3 \quad | \quad : \frac{1}{3} \pi r^2 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{h_K = 2 r}$

Berechnung von s:

$$s^2 = h_K^2 + r^2$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{s} = \sqrt{h_K^2 + r^2} = \sqrt{(2\mathrm{r})^2 + r^2} = \sqrt{5 r^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}\, r}$$