Mathematik Klasse 10 a/b/c, 3. KA – Flächen und Körper – Lösung A **19.02.2010**

A

Aufgabe 1: *2 + 3 Punkte*

a) Ein Quadrat mit der Kantenlänge d hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Kreis mit dem Radius
r = 9 cm. Bestimme *d*.

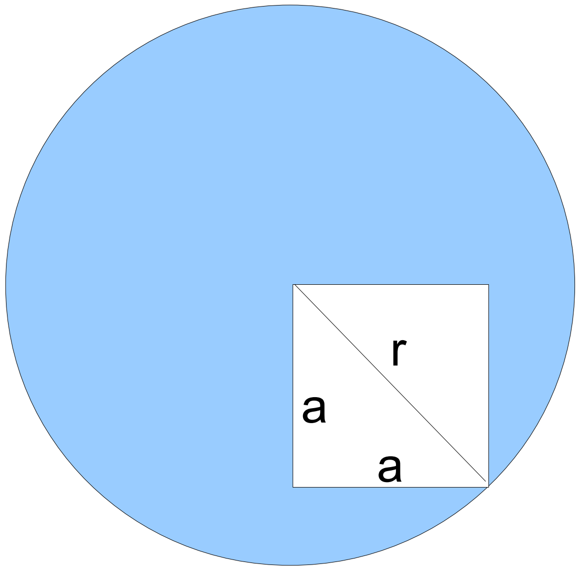
$$A_Q = A_K$$
$$\Leftrightarrow d^2 = \pi r^2$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{\pi r^2}$$
$$\Leftrightarrow d = \sqrt{\pi}\, r$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{d} = \sqrt{\pi}\, 9\, cm = \mathbf{15{,}95\, cm}$$

b) Ein Kreis mit dem Radius r hat den gleichen Flächeninhalt wie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge *a = 7 cm*. Bestimme r.

Herleitung Formel gleichseitiges Dreieck:

$$A_D = \frac{1}{2} a\, h_a \qquad h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$
$$\Leftrightarrow h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a \quad \text{, damit}$$
$$A_D = \frac{1}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$A_K = A_D$$
$$\Leftrightarrow \pi r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$
$$\Leftrightarrow r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} a^2$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4\pi} a^2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{\pi}} a = \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{\pi}} 7\, cm = \mathbf{2{,}60\, cm}$$



Zeichnung 1

Aufgabe 2: *4 Punkte*

Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der farbigen Figur in Zeichnung 1 mit *a = 1 cm*.

$$r^2 = a^2 + a^2 = (1\, cm)^2 + (1\, cm)^2$$
$$\Leftrightarrow r = \sqrt{2}\, cm$$

Fläche Kreis: $A_K = \pi r^2 = \pi (\sqrt{2}\, cm)^2 = 6{,}28\, cm^2$

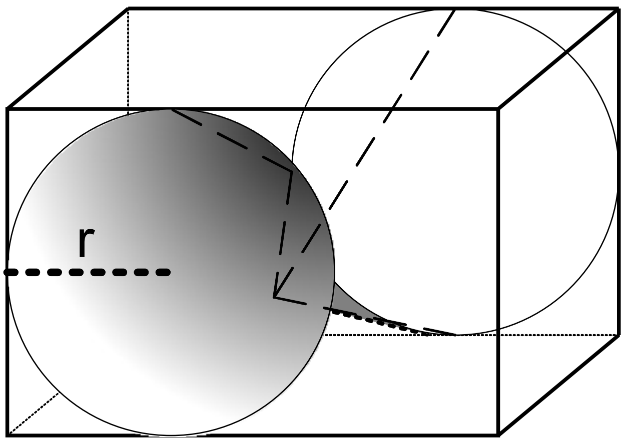
Fläche Figur: $\boldsymbol{A} = A_K - A_Q = \pi r^2 - a^2 = 6{,}28\, cm^2 - 1\, cm^2 = \mathbf{5{,}28\, cm^2}$

Umfang Kreis: $U_K = 2\pi r = 2\pi \sqrt{2}\, cm = 8{,}89\, cm$

Umfang Figur: $\boldsymbol{U} = U_K + U_Q = 8{,}89\, cm + 4\, cm = \mathbf{12{,}89\, cm}$

<u>Aufgabe 3:</u> *4 + 5 Punkte*

Eine Pyramide und ein Kegel haben die Grundfläche *G*, die Mantelfläche *M*, die Oberfläche *O*, die Höhe *h* und die Seitenkante *s*. Die Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit der Kantenlänge *a.*



Zeichnung 2

a). Berechne *M* und *s* der Kegels, wenn *h = 5 cm* und *G = 20 cm²*.

$\pi r^2 = G = \frac{20\,cm^2}{\pi}$, damit

$r = \frac{\sqrt{20}\,cm}{\sqrt{\pi}} = 2{,}52\,cm$

$s^2 = r^2 + h^2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{s} = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(2{,}52\,cm)^2+(5\,cm)^2} = \sqrt{6{,}36\,cm^2+25\,cm^2} = \sqrt{31{,}37\,cm^2} = \mathbf{5{,}60\,cm}$

$\boldsymbol{M} = \pi\, r\, s = \pi\cdot 2{,}52\,cm\cdot 5{,}60\,cm = \mathbf{44{,}34\,cm^2}$

b) Berechne *s* und *h* der Pyramide, wenn a = *4 cm* und M = 30 cm².

$M = 4\cdot A_D = 4\cdot\frac{1}{2}a\cdot h'$, damit $h' = \frac{1}{2}\frac{M}{a} = \frac{1}{2}30\frac{cm^2}{4\,cm} = 3{,}75\,cm$

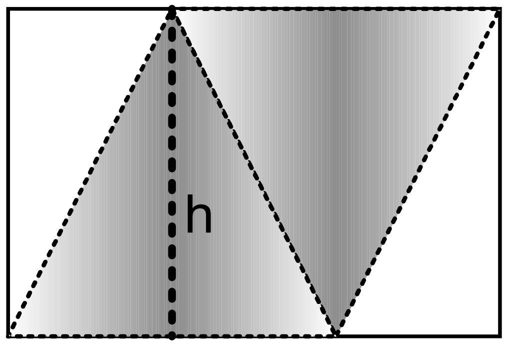
$s^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h'^2$, damit

$\boldsymbol{s} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\cdot 4\,cm\right)^2 + (3{,}75\,cm)^2} = \sqrt{4\,cm^2 + 14{,}06\,cm^2} = \sqrt{18{,}06\,cm^2} = \mathbf{4{,}25\,cm}$

$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = h'^2$, damit $\boldsymbol{h} = \sqrt{h'^2 - (1 over\ 2\,a)^2} = \sqrt{14{,}06\,cm^2 - 4\,cm^2} = \sqrt{10{,}06\,cm^2} = \mathbf{3{,}17\,cm}$

<u>Aufgabe 4:</u> *2 + 4 Punkte*

Zeichnung 2 zeigt einen Quader aus dem zwei gleiche Kegel mit dem Radius r und der Höhe h herausgeschnitten wurden. Zeichnung 3 zeigt die Draufsicht auf diesen Körper. r = 3 cm. h = 6 cm.



Zeichnung 3

a) Berechne die Länge der Linie, an der sich beide Kegel berühren.

Die Verbindungslinie ist die Seitenkante des Kegels:

$s^2 = r^2 + h^2$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{s} = \sqrt{r^2+h^2} = \sqrt{(3\,cm)^2+(6\,cm)^2} = \sqrt{44\,cm^2} = \mathbf{6{,}63\,cm}$

b) Berechne das Volumen des Restkörpers.

Der Restkörper ist ein das Volumen des Quaders minus zweimal das Volumen eines Kegels:

$$V_R = V_Q - 2V_K$$

$$V_Q = 2r \cdot 3r \cdot h = 6\,cm \cdot 9\,cm \cdot 6\,cm = 324\,cm^3$$

$$V_K = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\ pi\,(3\,cm)^2 \cdot 6\,cm = 56{,}55\,cm^3$$

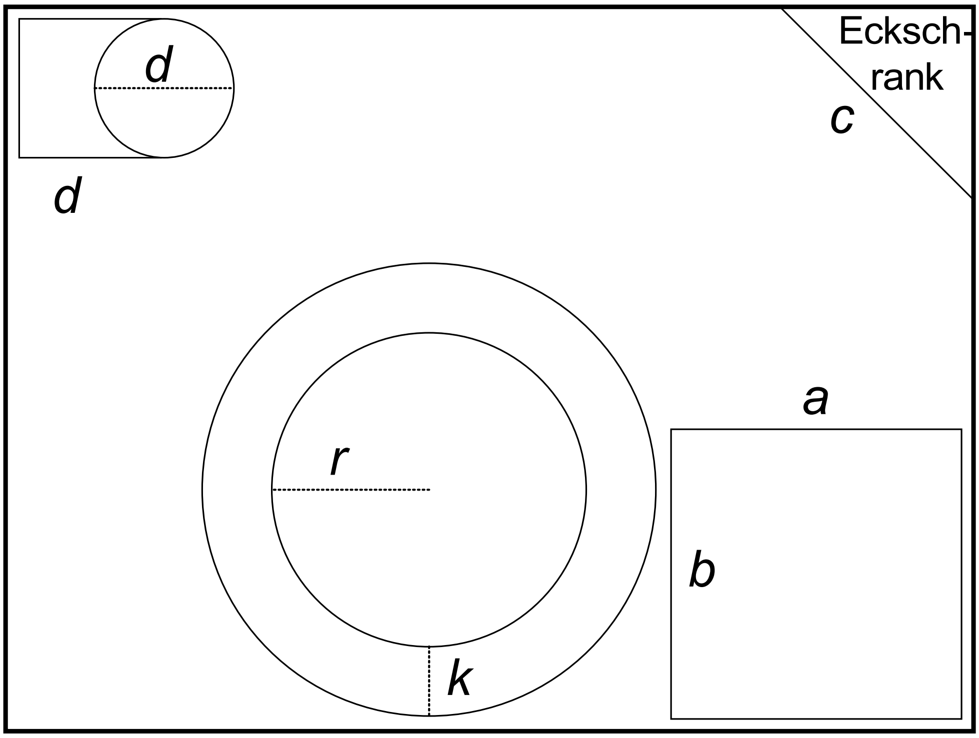
$$\boldsymbol{V_R} = V_Q - 2V_K = 324\,cm^3 - 2 \cdot 56{,}55\,cm^3 = \mathbf{210{,}90\,cm^3}$$

__Aufgabe 5:__ *2 + 5 + 2 Punkte*

Zeichnung 4 zeigt den Grundriss des Badezimmers von Herrn A. Medes auf Bodenhöhe. Er lässt die Badewanne bis zum Rand voll laufen und steigt hinein.

Zufälligerweise hat Herr Medes genau das Volumen eines Kegels mit dem Radius $r_K = 60\,cm$ und der Höhe $h = 2\,m$.

a) Er taucht vollständig unter. Wie viel Liter Wasser laufen aus?



Zeichnung 4

Da die Wanne bis zum Rand voll ist, läuft genauso viel Wasser aus, wie das Volumen von Herrn M. ist. Am einfachsten rechnet man direkt in Dezimeter, dann entfällt am Ende die Umrechnung in Liter, denn 1 l = 1 dm³.

$$\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\pi\, r\, h = \frac{1}{3}\pi\,(6\,dm)^2 \cdot 20\,dm = 753{,}98\,dm^3 = \mathbf{753{,}98}\,\boldsymbol{l}$$

A: Es laufen 754 Liter Wasser aus.

b) Berechne die Fläche, die das Wasser auf dem Fußboden bedeckt.

Benutze dazu die Daten:

- Der Raum hat die Maße *5 m x 4 m*.
- Die Badewanne hat den Radius *r = 90 cm*.
- Der Rand der Badewanne ist *k = 20 cm* breit.
- Der WC-Deckel hat den Durchmesser *d = 40 cm*.
- Die Dusche ist *a = 1,2 m* breit und *b = 1 m* tief.
- Die Frontseite des Eckschranks steht im 45°-Winkel zu beiden Wänden und ist *c = 80 cm* breit.

$$A = A_{Raum} - A_{Wanne} - A_{WC} - A_{Dusche} - A_{Eckschrank}$$
$$= A_R - A_W - A_{WC} - A_D - A_{ES}$$

$$A_R = 5\,m \cdot 4\,m = 20\,m^2$$

$$A_W = \pi(r+k)^2 = \pi(1{,}1\,m)^2 = 3{,}80\,m^2$$

$$A_{WC} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 + d^2 = \frac{1}{2}\pi(0{,}2\,m)^2 + (0{,}4\,m)^2 = 0{,}063\,m^2 + 0{,}16\,m^2 = 0{,}22\,m^2$$

$$A_D = 1{,}2\,m \cdot 1\,m = 1{,}2\,m^2$$

Der Eckschrank hat die Form eines rechtwinkligen, gleichseitigen Dreiecks mit der Hypotenuse $c = 0{,}8\,m$

Länge der Kathete e: $e^2 + e^2 = c^2 \Leftrightarrow e = \frac{c}{\sqrt{2}}$

$$A_{ES} = \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{c^2}{4} = \frac{(0{,}8\,m)^2}{4} = 0{,}16\,m^2$$

Damit ist $\boldsymbol{A} = 20\,m^2 - 3{,}80\,m^2 - 0{,}22\,m^2 - 1{,}2\,m^2 - 0{,}16\,m^2 = \mathbf{14{,}62\,m^2}$

A: Das Wasser bedeckt eine Fläche von 14,62 m².

c) Wie hoch steht das Wasser im Badezimmer?

$$\boldsymbol{h} = \frac{V}{A} = \frac{0{,}75398\,m^3}{14{,}62\,m^2} = \mathbf{0{,}052\,m}$$

A: Das Wasser steht 5,2 cm hoch.