Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung A 13.11.2009

A

Aufgabe 1: Schreibe den folgenden Term als Ausdruck einer einzelnen Logarithmusfunktion und vereinfache ihn so weit wie möglich. **(2+3+4 Punkte)**

a)

$$\log_2(72)-\log_2(9)=\log_2\left(\frac{72}{9}\right)=\log_2(8)=\mathbf{3}$$

b)

$$\log_3\left(\frac{\log_b(a^9)}{\log_b(a)}\right)=\log_3\left(\log_a(a^9)\right)=\log_3(9)=\mathbf{2}$$

c)

$$\log_a\left(\frac{4x^2-4y^2}{(2x-2y)^2}\right)+\log_a(x-y)=\log_a\left(\frac{(2x-2y)(2x+2y)}{(2x-2y)^2}\right)+\log_a(x-y)$$

$$=\log_a\left(\frac{(x+y)}{(x-y)}\right)+\log_a(x-y)=\log_a\left(\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)}\right)=\boldsymbol{\log_a(x+y)}$$

Aufgabe 2: Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist. **(3+6 Punkte)**

a)

$$\log_k(x)=2\cdot\log_k(4)+3\cdot\log_k(3)$$
$$\Leftrightarrow \log_k(x)=\log_k(4^2)+\log_k(3^3)$$
$$\Leftrightarrow \log_k(x)=\log_k(16\cdot 27)$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=432}$$

b)

$$-\log_a(x)=2\cdot\log_a\left(\frac{a^2b^4}{c^3}\right)-\log_a(a^4)+\log_a(b^{-4})+3\cdot\log_a(c^2)+2\cdot\log_a\left(\frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\log_a(x)=\log_a\left(\frac{a^4\cancel{b^8}\cancel{c^6}\cancel{a^4}}{\cancel{c^6}\cancel{a^4}\cancel{b^4}\cancel{b^4}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_a(x^{-1})=\log_a(a^4)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x}=a^4$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{1}{a^4}}$$

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung A 13.11.2009

<u>Aufgabe 3:</u> Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Exponentialgleichungen. Gib das Ergebnis mit zwei Stellen Genauigkeit hinter dem Komma an. **(3+4+6 Punkte)**

a)

$$3^{4x-6}=81$$
$$\Leftrightarrow 3^{4x-6}=3^4$$
$$\Leftrightarrow 4x-6=4$$
$$\Leftrightarrow 4x=10$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow x=2{,}5}$$

L = {2,5}

b)

$$2^x=3\cdot 5^{x-1}$$
$$\Leftrightarrow 2^x=\frac{3}{5}\cdot 5^x$$
$$\Leftrightarrow lg\left(2^x\right)=lg\left(\frac{3}{5}\cdot 5^x\right)$$
$$\Leftrightarrow lg\left(2^x\right)=lg\left(\frac{3}{5}\right)+lg\left(5^x\right)$$
$$\Leftrightarrow x\cdot lg(2)=lg\left(\frac{3}{5}\right)+x\cdot \log(5)$$
$$\Leftrightarrow x\cdot\left(lg(2)-lg(5)\right)=lg(3)-lg(5)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{lg(3)-lg(5)}{lg(2)-lg(5)}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow x\approx 0{,}5575}$$

L = {0,5575}

c)

$$4^{\left(x^2-\frac{3}{16}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$$
$$\Leftrightarrow lg\left(4^{\left(x^2-\frac{3}{16}\right)}\right)=lg\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$$
$$\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{3}{16}\right)\cdot lg(4)=x\cdot lg\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{16}=x\cdot\frac{lg\left(\frac{1}{2}\right)}{lg(4)}$$
$$\Leftrightarrow x^2-\frac{3}{16}=-0{,}5\cdot x$$
$$\Leftrightarrow x^2+0{,}5\,x-\frac{3}{16}=0$$
$$\Leftrightarrow x_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_{1/2}=-\frac{1}{4}\pm\frac{2}{4}$$
$$\boldsymbol{\Rightarrow x_1=-\frac{3}{4}\,;\ x_2=\frac{1}{4}}$$

L = {-3/4; 1/4}

Mathematik Klasse 10 a/b/c, 2. Klassenarbeit – Logarithmen – Lösung A 13.11.2009

<u>Aufgabe 4:</u> Pandemie (3+1+2+3 Punkte)

Eine Pandemie nennt man die weltweite Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit. Für die sogenannte "Schweinegrippe" hat die Weltgesundheitsorganisation WHO Pandemiealarm ausgelöst. In dieser Aufgabe betrachten wir die Ausbreitung einer fiktiven Virus-Infektion, die zu Beginn mathematisch dem Verlauf einer Exponentialfunktion folgt.

Als offizielle Stellen zum ersten Mal die Krankheit erkannten, waren bereits 345 Menschen infiziert. Nach 5 Tagen hat sich die Zahl der kranken Menschen bereits verdreifacht.

a) Stelle die Funktionsgleichung auf, welche den Ansteckungsverlauf beschreibt. (f(x): Anzahl der Infizierten, x: Anzahl der Tage seit Erkennen der Epidemie)

$f(t)=b\cdot a^t \quad f(0)=345 \quad , \quad f(5)=3\cdot 345=1035$

Einsetzen: $345=b\cdot a^0 \Rightarrow b=345 \quad 3\cdot 345=345\cdot a^5 \Rightarrow a=\sqrt[5]{3}$

Damit: $\boldsymbol{f(t)=345\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^t}$ oder $\boldsymbol{f(t)=345\cdot 3^{\frac{t}{5}}}$

b) Wie viele Menschen waren nach dem ersten Tag erkrankt?

$f(1)=345\cdot 3^{\frac{1}{5}}\approx \mathbf{429{,}78}$ ***A: Nach dem ersten Tag waren ca. 430 Personen erkrankt.***

c) Wie viele Menschen waren vier Tage, bevor die Krankheit registriert wurde, erkrankt?

$f(-4)=345\cdot 3^{-4\text{¿}5}\approx \mathbf{143{,}26}$ ***A: Vier Tage vorher waren ca. 143 Personen erkrankt.***

d) Nach jeweils wie vielen Tagen verdoppelt sich die Anzahl der kranken Menschen?

$f(t)=345\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^t$ Doppelte Anzahl einsetzen:

$$
\begin{aligned}
& 2\cdot 345=345\cdot\left(\sqrt[5]{3}\right)^{t_D} \\
\Leftrightarrow\ & 2=\left(\sqrt[5]{3}\right)^{t_D} \\
\Leftrightarrow\ & lg(2)=lg\left(\left(\sqrt[5]{3}\right)^{t_D}\right) \\
\Leftrightarrow\Leftrightarrow\ & lg(2)=t_D\cdot lg\left(\sqrt[5]{3}\right) \\
\Leftrightarrow\ & t_D=\frac{lg(2)}{lg\left(\sqrt[5]{3}\right)} \\
\Leftrightarrow\ & \boldsymbol{t_D\approx 3{,}1546}
\end{aligned}
$$

A: Nach etwas mehr als 3 Tagen verdoppelt sich die Anzahl der kranken Menschen.