Mathematik Klasse 10, 1. Klassenarbeit, Potenzen – Lösung B **21.09.2009**

Aufgabe 1:

B

a) Ein Uranatom hat die Masse $4 \cdot 10^{-22}$ g. Wie viele Uranatome bilden die kritische Masse von ungefähr 50 kg?

$$50\,kg = 5 \cdot 10^4\,g$$

$$\frac{5 \cdot 10^4\,g}{4 \cdot 10^{-22}\,g} = 1{,}25 \cdot 10^{26}$$

A: Es sind etwa 1,25 $\cdot 10^{26}$ Uranatome nötig. ***2 Punkte***

b) Ein Bienenvolk umfasst etwa 70000 Bienen. Ein solches Volk sammelt im Frühjahr und Sommer etwa 10 kg Blütenpollen pro Monat (30 Tage). Blütenpollen haben eine ungefähre Masse von $5 \cdot 10^{-12}$ kg.

Welche Anzahl an Blütenpollen sammelt eine einzelne Biene am Tag?

$$10\,kg = 4 \cdot 10^4\,g$$

$\frac{4 \cdot 10^4\,kg}{30\,d} = 0{,}33$ Kilogramm pro Tag

$\frac{0{,}33\,kg}{70000} = 4{,}76 \cdot 10^{-6}$ Kilogramm pro Tag pro Biene

$\frac{4{,}76 \cdot 10^{-6}\,kg}{5 \cdot 10^{-12}\,kg} = 9{,}52 \cdot 10^5 = 952.000$ Blütenpollen pro Tag pro Biene ***3 Punkte***

A: Eine Biene sammelt am Tag fast eine Million Blütenpollen.

Aufgabe 2: Vereinfache:

a) $2^{-3} \cdot 2^4 = 2^{(-3+4)} = 2^1 = 2$ ***1 Punkt***

b) $((-1)^3)4 = (-1)^4 = 1$ ***1 Punkt***

c) $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^2} = \frac{1}{36}$ ***1 Punkt***

d) $2^3 + 2^4 = 2^3 + 2 \cdot 2^3 = 2^3 \cdot (1+2) = 8 \cdot 3 = 24$ ***1 Punkt***

e) $(4s^2)^n \cdot 2s^{-n} = \frac{2 \cdot (2s)^n (2s)^n}{s^n} = \frac{2 \cdot (2s)^n 2^n \cancel{s^n}}{\cancel{s^n}} = 2 \cdot (4s)^n$ ***2 Punkte***

f) $(9z)^4 : (3z)^4 = \frac{(3 \cdot 3\,z)^4}{(3z)^4} = 3^4 = 81$ ***2 Punkte***

Mathematik Klasse 10, 1. Klassenarbeit, Potenzen – Lösung B **21.09.2009**

Aufgabe 3: Vereinfache:

a) $\left[\frac{5c}{a^{-1}}\cdot\left(\frac{2}{3}ac\right)^{-2}\right]^0=1$ ***1 Punkt***

Ab hier sind verschiedene Lösungswege möglich ***3 Punkte***

b) $\left(\frac{3x}{4y^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2y^3}{9x^5}\right)^2=\frac{3x}{4y^2}\left(\frac{3x}{4y^2}\right)^2\cdot\left(\frac{2y^3}{9x^5}\right)^2=\frac{3x}{4y^2}\left(\frac{3x\,2y^3}{4y^2\cdot 9x^5}\right)^2=\frac{3x}{4y^2}\left(\frac{y}{2\cdot 3\,x^4}\right)^2=\frac{3\,x\,y^2}{4\cdot y^2\cdot 4\cdot 9\,x^8}=\frac{1}{48\,x^7}$

c) $\frac{a^{k-1}b^{l-2}c^{m-3}-a^{k+5}b^{l+4}c^{m+3}}{a^{k+2}b^{l+1}c^m(1-a^3b^3c^3)}=\frac{a^{k-1}b^{l-2}c^{m-3}(1-a^6b^6c^6)}{a^{k+2}b^{l+1}c^m(1-a^3b^3c^3)}$

$=\frac{(1-a^3b^3c^3)(1+a^3b^3c^3)}{a^3b^3c^3(1-a^3b^3c^3)}=\frac{1}{a^3b^3c^3}(1+a^3b^3c^3)=\frac{1}{a^3b^3c^3}+1$ ***4 Punkte***

d) $\frac{\sqrt[10]{a^{12}}\cdot y^{1,2}}{\sqrt[15]{a^{18}}}=\frac{a^{\frac{12}{10}}y^{12}}{a^{\frac{18}{15}}}=\frac{a^{1,2}y^{1,2}}{a^{1,2}}=y^{1,2}=\sqrt[5]{y^6}$ ***3 Punkte***

Aufgabe 4: Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

a) $4\cdot x^9=-78732\Leftrightarrow x^9=-19683\Leftrightarrow x=\sqrt[9]{-19683}\Leftrightarrow x=-3, L=\{-3\}$ ***2 Punkte***

b) $\frac{1}{4}\cdot x^6=11664\Leftrightarrow x^6=46656\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt[6]{46656}=\pm 6, L=\{-6\,;6\}$ ***3 Punkte***

c) $(x^2-6)^7=2187\Leftrightarrow x^2-6=\sqrt[7]{2187}\Leftrightarrow x^2-6=3\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{1/2}=\pm 3, L=\{-3\,;3\}$ ***3 Punkte***

d) $(3{,}1\,x^{14})^{16}+21792=22\Leftrightarrow(3{,}1\,x^{14})^{16}=-21770\Rightarrow L=\{\}$ *, weil kein negativer Radikand bei geradem Exponenten definiert.* ***2 Punkte***

Mathematik Klasse 10, 1. Klassenarbeit, Potenzen – Lösung B **21.09.2009**

Aufgabe 5:

Die Kepler'schen Gesetze beschreiben die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten für die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne. Das 3. Kepler'sche Gesetz besagt, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten bei allen Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen verhalten. Als Gleichung geschrieben lautet das Gesetz demnach $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$ wobei T_1 und T_2 die Umlaufzeiten der Planeten 1 bzw. 2 sind und a_1 bzw. a_2 die dazu gehörigen großen Halbachsen (entspricht der mittleren Entfernung zur Sonne).

a) Wie groß ist die Umlaufzeit des Merkur um die Sonne (also wie lange dauert ein Merkurjahr)?

Planet 1: Erde, Planet 2: Merkur

Damit

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}\Rightarrow\frac{(365{,}25\,d)^2}{T_2^2}=\frac{(149{,}6\cdot 10^9\,m)^3}{(57{,}9\cdot 10^9\,m)^3}\Rightarrow T_2{}^2=\frac{57{,}9^3}{149{,}6^3}\cdot(365{,}25\,d)^2\Leftrightarrow T_2{}^2=7735{,}2\,d^2$$
$$\Rightarrow T_2=87{,}95\,d\text{ , da die zweite Lösung } (T\text{ negativ}) \text{ unphysikalisch ist.}$$

A: Die Umlaufzeit des Merkur um die Sonne beträgt 88 Tage. ***3 Punkte***

b) Wie ist die mittlere Entfernung des Neptun zur Sonne?

Planet 1: Erde, Planet 2: Neptun

164,79 a = 60190,5 d

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}\Rightarrow\frac{(365{,}25\,d)^2}{(60190{,}5\,d)^2}=\frac{(149{,}6\cdot 10^9\,m)^3}{(a_2)^3}\Rightarrow a_2{}^3=\frac{60190{,}5^2}{325{,}25^2}\cdot(149{,}6\cdot 10^9)^3\Leftrightarrow a_2{}^3=9{,}088\cdot 10^{37}\,m^3$$
$$\Rightarrow a_2=\sqrt[3]{9{,}088\cdot 10^{37}\,m^3}=4{,}496\cdot 10^{12}\,m$$

A: Der Neptun ist 4496 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt. (Das ist etwas mehr als der 30fache Erdabstand).

4 Bonuspunkte

Astronomische Daten für a) und b):

Planet	große Halbachse	Umlaufzeit
Erde	$149{,}6\cdot 10^9$ m	365,256 d
Merkur	$57{,}9\cdot 10^9$ m	***87,95 d***
Neptun	***$4496\cdot 10^9$ m***	164,79 a