Mathematik Klasse 10, 1. Klassenarbeit, Potenzen – Lösung A **21.09.2009**

Aufgabe 1:

A

a) Ein Staubkorn hat ungefähr eine Masse von 10^{-10} kg. Ein Staubsaugerbeutel sei nur mit solchen Körnern gefüllt und wiege 750 g. Wie viele Körner sind in dem Beutel?

$$10^{-10}\,kg = 1\cdot 10^{-7}\,g$$

$$\frac{750\,g}{1\cdot 10^{-7}\,g} = 750\cdot 10^{7} = 7{,}5\cdot 10^{9} = 7{,}5\,Milliarden$$

2 Punkte

A: Im Staubsaugerbeutel sind etwa 7,5 Milliarden Staubkörner.

b) Ein Bienenvolk umfasst etwa 60000 Bienen. Ein solches Volk sammelt etwa 40 kg Blütenpollen pro Jahr. Blütenpollen haben eine ungefähre Masse von $5\cdot 10^{-12}$ kg.

Welche Anzahl an Blütenpollen sammelt eine einzelne Biene am Tag? (Durchschnittswert ohne Berücksichtigung der Jahreszeiten)

$\frac{40\,kg}{5\cdot 10^{-12}\,kg} = 8\cdot 10^{12}$ *Blütenpollen pro Jahr.*

$\frac{8\cdot 10^{12}}{365} = 2{,}2\cdot 10^{10}$ *Blütenpollen pro Tag*

$\frac{2{,}2\cdot 10^{10}}{60000} = 365297$ *Blütenpollen pro Biene pro Tag* ***3 Punkte***

A: Eine einzelne Biene sammelt im Tagesdurchschnitt etwa 365.000 Blütenpollen.

Aufgabe 2: Vereinfache:

a) $2^{-3}\cdot 2^{4} = 2^{(-3+4)} = 2^{1} = 2$ ***1 Punkt***

b) $((-1)^{3})\,4 = (-1)^{4} = 1$ ***1 Punkt***

c) $(-6)^{-2} = \frac{1}{(-6)^{2}} = \frac{1}{36}$ ***1 Punkt***

d) $2^{3}+2^{4} = 2^{3}+2\cdot 2^{3} = 2^{3}\cdot(1+2) = 8\cdot 3 = 24$ ***1Punkt***

e) $(4s^{2})^{n}\cdot 2s^{-n} = \frac{2\cdot(2s)^{n}(2s)^{n}}{s^{n}} = \frac{2\cdot(2s)^{n}2^{n}\cancel{s^{n}}}{\cancel{s^{n}}} = 2\cdot(4s)^{n}$ ***2 Punkte***

f) $(9z)^{4}:(3z)^{4} = \frac{(3\cdot 3\,z)^{4}}{(3z)^{4}} = \frac{3^{4}\cdot\cancel{(3\,z)^{4}}}{\cancel{(3\,z)^{4}}} = 3^{4} = 81$ ***2 Punkte***

Mathematik Klasse 10, 1. Klassenarbeit, Potenzen – Lösung A **21.09.2009**

<u>Aufgabe 3:</u> Vereinfache:

a) $\left[\frac{4d}{e^{-2}}\cdot\left(\frac{3}{4}de\right)^{-3}\right]^0=1$ ***1 Punkt***

Ab hier sind verschiedene Lösungswege möglich ***3 Punkte***

b) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^3\cdot\left(\frac{9y}{4x^4}\right)^2=\frac{2x^2}{3y}\cdot\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2\cdot\left(\frac{9y}{4x^4}\right)^2=\frac{2x^2}{3y}\cdot\left(\frac{2x^2\cdot 9y}{3y\cdot 4x^4}\right)^2=\frac{2x^2}{3y}\cdot\left(\frac{3}{2x^2}\right)^2=\frac{2x^2\cdot 3\cdot 3}{3y\cdot 2x^2\cdot 2x^2}=\frac{3}{2yx^2}$

c) $\frac{x^{k-1}y^{l-2}z^{m-3}-x^{k+7}y^{l+6}z^{m+5}}{x^{k+3}y^{l-2}z^{m-1}(1-x^4y^4z^4)}=\frac{x^{k-1}y^{l-2}z^{m-3}\cdot(1-x^8y^8z^8)}{x^{k+3}y^{l-2}z^{m-1}(1-x^4y^4z^4)}$

$=\frac{x^{k-1}y^{l-2}z^{m-3}\cdot(1-x^4y^4z^4)\cdot(1+x^4y^4z^4)}{x^{k+3}y^{l-2}z^{m-1}(1-x^4y^4z^4)}=x^{-4}z^{-2}(1+x^4y^4z^4)=\frac{1}{x^4z^2}+y^4z^2$ ***4 Punkte***

d) $\frac{\sqrt[10]{z^{14}}\cdot b^{1,4}}{\sqrt[15]{z^{21}}}=\frac{z^{\frac{14}{10}}b1^{14}}{z^{\frac{21}{15}}}=\frac{z^{1,4}b^{1,4}}{z^{1,4}}=b^{1,4}=\sqrt[5]{b^7}$ ***3 Punkte***

<u>Aufgabe 4:</u> Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

a) $5\cdot x^7=-81920\Leftrightarrow x^7=-16384\Leftrightarrow x=\sqrt[7]{-16384}\Leftrightarrow x=-4, L=\{-4\}$ ***2 Punkte***

b) $\frac{1}{9}\cdot x^{12}=59049\Leftrightarrow x^{12}=531441\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt[12]{531441}=\pm 3, L=\{-3\,;3\}$ ***3 Punkte***

c) $(x^2-10)^5=7776\Leftrightarrow x^2-10=\sqrt[5]{7776}\Leftrightarrow x^2-10=6\Leftrightarrow x^2=16\Rightarrow x_{1/2}=\pm 4, L=\{-4\,;4\}$ ***3 Punkte***

d) $(2{,}3x^{12})^{18}+34447=18\Leftrightarrow(2{,}3x^{12})^{18}=-34429\Rightarrow L=\{\}$ *, weil kein negativer Radikand bei geradem Exponenten definiert.* ***2 Punkte***

Aufgabe 5:

Die Kepler'schen Gesetze beschreiben die fundamentalen Gesetzmäßigkeiten für die Umlaufbahnen der Planeten um die Sonne. Das 3. Kepler'sche Gesetz besagt, dass sich die Quadrate der Umlaufzeiten bei allen Planeten wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen verhalten. Als Gleichung geschrieben lautet das Gesetz demnach $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$ wobei T_1 und T_2 die Umlaufzeiten der Planeten 1 bzw. 2 sind und a_1 bzw. die a_2 dazu gehörigen großen Halbachsen (entspricht der mittleren Entfernung zur Sonne).

a) Wie groß ist die Umlaufzeit des Mars um die Sonne (also ein Marsjahr)?

Planet 1: Erde, Planet 2: Mars

Damit

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}\Rightarrow\frac{(365{,}25\,d)^2}{T_2^2}=\frac{(149{,}6\cdot10^9\,m)^3}{(227{,}9\cdot10^9\,m)^3}\Rightarrow T_2{}^2=\frac{222{,}9^3}{149{,}6^3}\cdot(365{,}25\,d)^2\Leftrightarrow T_2{}^2=471648\,d^2$$
$$\Rightarrow T_2=686{,}77\,d\text{ , da die zweite Lösung }(T\text{ negativ})\text{ unphysikalisch ist.}$$

A: Die Umlaufzeit des Mars um die Sonne dauert 686 Tage. ***3 Punkte***

b) Wie ist die mittlere Entfernung des Uranus zur Sonne?

Planet 1: Erde, Planet 2: Uranus

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}\Rightarrow\frac{(365{,}25\,d)^2}{(30681{,}4\,d)^2}=\frac{(149{,}6\cdot10^9\,m)^3}{(a_2)^3}\Rightarrow a_2{}^3=\frac{30681^2}{325{,}25^2}\cdot(149{,}6\cdot10^9)^3\Leftrightarrow a_2{}^3=2{,}362\cdot10^{37}\,m^3$$
$$\Rightarrow a_2=\sqrt[3]{2{,}362\cdot10^{37}\,m^3}=2{,}869\cdot10^{12}\,m$$

A: Der Uranus ist 2869 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt. (Das ist etwas mehr als der 19fache Erdabstand).

4 Bonuspunkte

Astronomische Daten:

Planet	große Halbachse	Umlaufzeit
Erde	$149{,}6\cdot10^9$ m	365,256 d
Mars	$227{,}9\cdot10^9$ m	***686,8 d***
Uranus	***$2869\cdot10^9$ m***	84,001 a