

Aufgabe 1: Italienurlaub

Der Gotthardpass

Familie Feuerstein fährt mit dem Auto in den Urlaub nach Italien. Dabei gilt es natürlich die Alpen zu überqueren.

Der Passübergang am Gotthard beginnt auf 1447 m über Meereshöhe. Die 5,5% Steigung schafft der Wagen mit der Geschwindigkeit von 12 Metern pro Sekunde.

Die Passhöhe liegt bei 2106 m ü. M.

Den Abstieg auf 1175 m ü. M. mit 6,4% Steigung fahren sie mit der Geschwindigkeit von 20 Metern pro Sekunde.

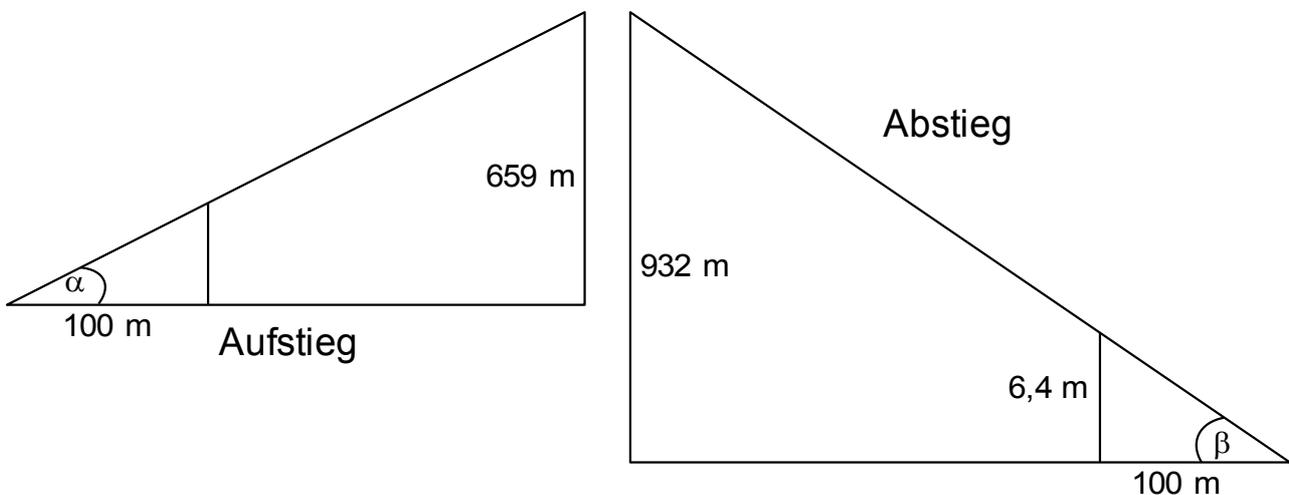
(Es wird eine jeweils eine konstante Steigung und Geschwindigkeit angenommen)

Wie lange dauert die gesamte Passüberquerung?

Für die Fahrt hinauf und hinab sind zwei Dreiecke zu betrachten. Eine Seite des Dreieck hat den Höhenunterschied als Länge.

Auf: $h_1 = 2106 \text{ m} - 1447 \text{ m} = 659 \text{ m}$

Ab: $h_2 = 2106 \text{ m} - 1175 \text{ m} = 931 \text{ m}$



Aufstieg: $\tan \alpha = \frac{5,5}{100} = 0,05 \Rightarrow \alpha = 3,1481^\circ$

Abstieg: $\tan \alpha = \frac{6,4}{100} = 0,064 \Rightarrow \alpha = 3,6619^\circ$

Gesucht ist jeweils die Hypotenuse s_1 und s_2 .

$$s_1 = 659 \frac{m}{\sin \alpha} = 11999,93 \text{ m} = 12,000 \text{ km} \quad s_2 = 932 \frac{m}{\sin \beta} = 14592,29 \text{ m} = 14,592 \text{ km}$$

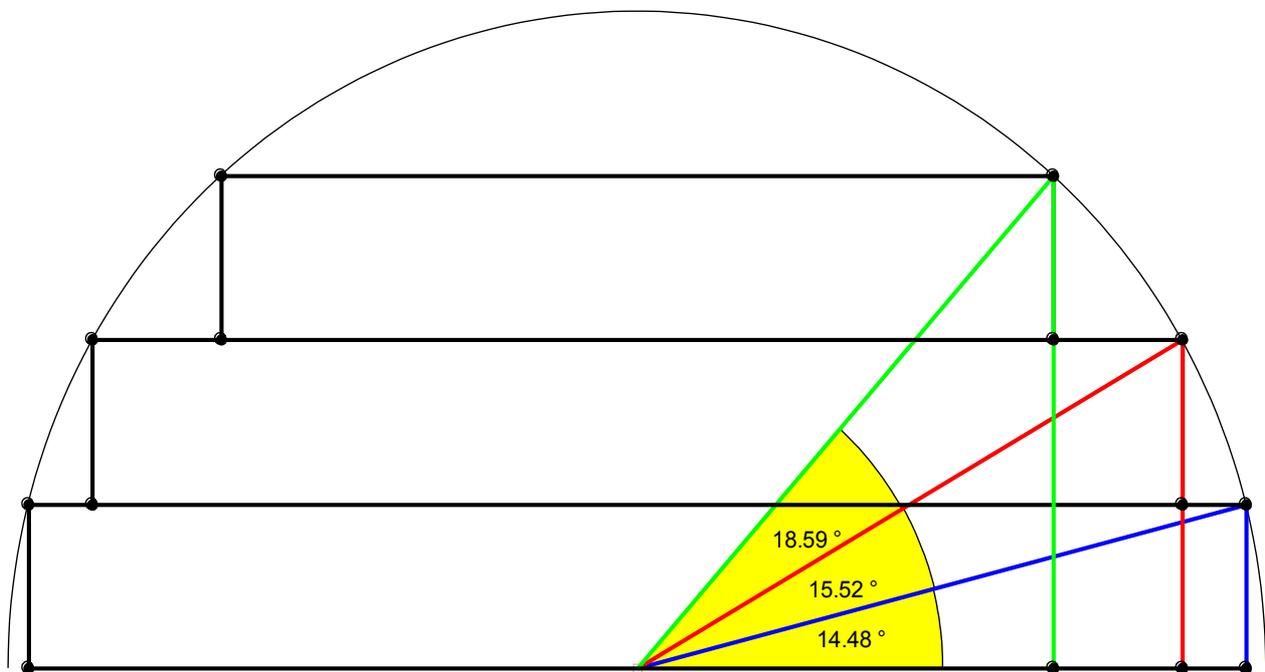
$$t_1 = \frac{12000 \text{ m}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1000 \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{14592 \text{ m}}{20 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 730 \text{ s}$$

A: Die Passüberquerung dauert 1730 s bzw. ca. 29 min.

Aufgabe 2: Hochzeitstorte

Für eine Hochzeitsfeier wird eine Torte gebacken. Sie besteht aus einzelnen Stufen mit kreisförmiger Grundfläche. Basis der Tortenkonstruktion ist ein Halbkreis mit dem Radius $r = 24$ cm. Im Querschnitt sieht die Torte so aus



a) Wie groß ist das Volumen der Torte?

Die Torte besteht aus drei übereinanderliegenden Zylindern. Dazu werden das blaue, das rote und das grüne Dreieck betrachtet. Der Radius der drei Zylinder ist r_{z1} , r_{z2} und r_{z3} . Die jeweilige Höhe h_1 , h_2 und h_3 .

Unterer Zylinder, blaues Dreieck:

$$h_1 = r \cdot \sin 14,48^\circ = 24 \text{ cm} \cdot \sin 14,48^\circ = 6 \text{ cm}$$

$$r_{z1} = r \cdot \cos 14,48^\circ = 24 \text{ cm} \cdot \cos 14,48^\circ = 23,24 \text{ cm}$$

$$V_{z1} = \pi r_{z1}^2 \cdot h_1 = \pi (23,24)^2 \cdot 6 \text{ cm} = 10178,52 \text{ cm}^3$$

Mittlerer Zylinder, rotes Dreieck:

$$h_2 = r \cdot \sin(14,48^\circ + 15,52^\circ) - h_1 = 24 \text{ cm} \cdot \sin 30^\circ - 6 \text{ cm} = 12 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$r_{z2} = r \cdot \cos(14,48^\circ + 15,52^\circ) = 24 \text{ cm} \cdot \cos 30^\circ = 20,78 \text{ cm}$$

$$V_{z2} = \pi r_{z2}^2 \cdot h_2 = \pi (20,78)^2 \cdot 6 \text{ cm} = 8143,01 \text{ cm}^3$$

Oberer Zylinder, grünes Dreieck:

$$h_3 = r \cdot \sin(14,48^\circ + 15,52^\circ + 18,59^\circ) - h_2 - h_1 = 24 \text{ cm} \cdot \sin 48,59^\circ - 6 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 18 \text{ cm} - 6 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$$

$$r_{z3} = r \cdot \cos(14,48^\circ + 15,52^\circ + 18,59^\circ) = 24 \text{ cm} \cdot \cos 48,59^\circ = 15,75 \text{ cm}$$

$$V_{z3} = \pi r_{z3}^2 \cdot h_3 = \pi (15,75)^2 \cdot 6 \text{ cm} = 4750,17 \text{ cm}^3$$

$$V = V_{z1} + V_{z2} + V_{z3} = 23072 \text{ cm}^3$$

A: Das Volumen der Torte beträgt etwa 23 Liter.

b) Von allen sichtbaren Seiten wird die Torte 2 mm dick mit Zuckerguß bestrichen. Wie viel Liter Zuckerguß wird benötigt?

Genauer Lösungsweg: Das Volumen der Torte plus Zuckerguß minus das Volumen der Torte ohne Zuckerguß.

Zuckergußtorte:

Unterer Zylinder: Der Radius und die Höhe des Zylinders erhöht sich um 2 mm.

$$V_{z1} = \pi r_{z1}^2 \cdot h_1 = \pi (23,44)^2 \cdot 6,2 \text{ cm} = 10699,64 \text{ cm}^3$$

Mittlerer Zylinder: Der Radius erhöht sich um 2 mm. Die Höhe bleibt gleich.

$$V_{z2} = \pi r_{z2}^2 \cdot h_2 = \pi (20,98)^2 \cdot 6 \text{ cm} = 8300,47 \text{ cm}^3$$

Oberer Zylinder: Der Radius erhöht sich um 2 mm. Die Höhe bleibt gleich.

$$V_{z3} = \pi r_{z3}^2 \cdot h_3 = \pi (15,75)^2 \cdot 6 \text{ cm} = 4870,60 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = V_{z1} + V_{z2} + V_{z3} = 23871 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Zuckerguß}} = V_2 - V_1 = 799 \text{ cm}^3$$

A: Es werden ca. 0,8 Liter Zuckerguß benötigt.