**Mathematik Klasse 10b, Logarithmusrechenregeln – Lösung** **06.11.2009**

**Aufgabe 1:** Schreibe den folgenden Term mit als Ausdruck einer einzelnen Logarithmus-funktion und vereinfache ihn so weit wie möglich. (Hinweis: Auf die Basis achten!)

*Prinzipiell gibt es zwei grundsätzliche Lösungswege: Entweder man zieht die Logarithmen auseinander, oder man fasst sie zusammen.*

**a)**

$$\log_a(a^2 b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{(a+b)}{(a^2-b^2)}\right) - \frac{\ln(b^3 c^4)}{\ln(a)} = \log_a(a^2) + \log_a(b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)}(a-b)}\right) - \log_a(b^3 c^4)$$

$$= \quad 2 + \log_a\left(\frac{b^3 c^4}{b^3 c^4}\right) + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 + \log_a(1) + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 - \log_a(a-b)$$

**b)** $\log_a(a^2 b^3 c^4) - \log_a\left(\frac{(3\mathrm{a}+3\mathrm{b})\cdot b^5}{(3\mathrm{a}^2+6\mathrm{ab}+3\mathrm{b}^2)\cdot c^2}\right) + \frac{lg(b^2 c^{-6})}{lg(a)}$

$$= \quad 2\cdot\log_a(a) + 3\cdot\log_a(b) + 4\cdot\log_a(c) - \log_a\left(\frac{3(a+b)b^5}{3(a+b)^2 c^2}\right) + \log_a(b^2 c^{-6})$$

$$= \quad 2 + 3\cdot\log_a(b) + 4\cdot\log_a(c) - 5\cdot\log_a(b) + \log_a(a+b) + 2\cdot\log_a(c) + 2\cdot\log_a(b) - 6\cdot\log_a(c)$$

$$= \quad 2 + \log_a(a+b)$$

**c)** $\log_a\left(\frac{\frac{\log_b(x^2 y^2)}{\log_b(a)} + \frac{lg(x^3)}{lg(a)} + \frac{\frac{\ln(y^4)}{\ln(b)}}{\log_b(a)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right) \quad = \quad \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \frac{\log_b(y^4)}{\log_b(a)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right)$

$$= \quad \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \log_a(y^4)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) \quad = \quad \log_a\left(\frac{\log_a(x^5 y^6)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) \quad = \quad \log_a(1) = 0$$

**Aufgabe 2:** Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist.

**a)** $-\log_a(x) = \log_a(8\mathrm{b}^3 c^4) - 3\cdot\log_a(b) + 2\cdot\log_a(c\,d\,e) + \log_a\left(\frac{1}{c^6}\right) - \log_a(d^2 e^2)$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a\left(\frac{b^3 c^4 c^2 d^2 e^2}{b^3 c^6 d^2 e^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a(1)$$

$$\Leftrightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

**b)** $-\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(5b^4c^4)+2\cdot\log_a(b)+2\cdot\log_a\left(\frac{(d\,e)}{(b^3c^2)}\right)-\log_a(d^2e^2)$

$$-\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(5b^4c^4)+2\cdot\log_a(b)+2\cdot\log_a\left(\frac{(d\,e)}{(b^3c^2)}\right)-\log_a(d^2e^2)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(5)+4\cdot\log_a(b)+4\cdot\log_a(c)+2\cdot\log_a(b)+\log_a\left(\frac{(de)^2}{(b^3c^2)^2}\right)-2\cdot\log_a(d)-2\cdot\log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(5)+6\cdot\log_a(b)+4\cdot\log_a(c)+2\cdot\log_a(d)+2\cdot\log_a(e)-6\cdot\log_a(b)-4\cdot\log_a(c)$$
$$-2\cdot\log_a(d)-2\cdot\log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(\frac{1}{x})=\log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x)=\log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

**c)** $\log_b(x^2)\cdot\log_a(b)=\log_a\left[\left((a^2-b^2)+lg(10^{b^2})\right)^{\frac{\ln(a^2)}{\ln(a)}}\right]$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2)\cdot\log_a(b)=\log_a\left[\left((a^2-b^2)+b^2\right)^{\log_a(a^2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2)\cdot\log_a(b)=\log_a\left[\left(a^2\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2)=\frac{\log_a(a^4)}{\log_a(b)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2)=\log_b(a^4)$$

$$\Leftrightarrow x^2=a^4$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm a^2$$