

Aufgabe 1: Schreibe den folgenden Term mit als Ausdruck einer einzelnen Logarithmusfunktion und vereinfache ihn so weit wie möglich. (Hinweis: Auf die Basis achten!)

Prinzipiell gibt es zwei grundsätzliche Lösungswege: Entweder man zieht die Logarithmen auseinander, oder man fasst sie zusammen.

a)

$$\begin{aligned} \log_a(a^2 b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{(a+b)}{(a^2-b^2)}\right) - \frac{\ln(b^3 c^4)}{\ln(a)} &= \log_a(a^2) + \log_a(b^3 c^4) + \log_a\left(\frac{(a+b)}{(-a+b)(a-b)}\right) - \log_a(b^3 c^4) \\ &= 2 + \log_a\left(\frac{b^3 c^4}{b^3 c^4}\right) + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 + \log_a(1) + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 + \log_a\left(\frac{1}{a-b}\right) = 2 - \log_a(a-b) \end{aligned}$$

b) $\log_a(a^2 b^3 c^4) - \log_a\left(\frac{(3a+3b) \cdot b^5}{(3a^2+6ab+3b^2) \cdot c^2}\right) + \frac{\lg(b^2 c^{-6})}{\lg(a)}$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \log_a(a) + 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - \log_a\left(\frac{3(a+b)b^5}{3(a+b)^2 c^2}\right) + \log_a(b^2 c^{-6}) \\ &= 2 + 3 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) - 5 \cdot \log_a(b) + \log_a(a+b) + 2 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(b) - 6 \cdot \log_a(c) \\ &= 2 + \log_a(a+b) \end{aligned}$$

c) $\log_a\left(\frac{\frac{\log_b(x^2 y^2)}{\log_b(a)} + \frac{\lg(x^3)}{\lg(a)} + \frac{\ln(y^4)}{\ln(b)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \frac{\log_b(y^4)}{\log_b(a)}}{\log_a(x^5 y^6)}\right)$

$$\begin{aligned} &= \log_a\left(\frac{\log_a(x^2 y^2) + \log_a(x^3) + \log_a(y^4)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a\left(\frac{\log_a(x^5 y^6)}{\log_a(x^5 y^6)}\right) = \log_a(1) = 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimme x mit Hilfe von Äquivalenzumformungen so, dass es eine Lösung der folgenden Gleichung ist.

a) $-\log_a(x) = \log_a(8b^3 c^4) - 3 \cdot \log_a(b) + 2 \cdot \log_a(c d e) + \log_a\left(\frac{1}{c^6}\right) - \log_a(d^2 e^2)$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a\left(\frac{b^3 c^4 c^2 d^2 e^2}{b^3 c^6 d^2 e^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a(x) = \log_a(8) + \log_a(1)$$

$$\Leftrightarrow \log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(8)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$\text{b) } -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5b^4c^4) + 2 \cdot \log_a(b) + 2 \cdot \log_a\left(\frac{(de)}{(b^3c^2)}\right) - \log_a(d^2e^2)$$

$$-\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5b^4c^4) + 2 \cdot \log_a(b) + 2 \cdot \log_a\left(\frac{(de)}{(b^3c^2)}\right) - \log_a(d^2e^2)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5) + 4 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(b) + \log_a\left(\frac{(de)^2}{(b^3c^2)^2}\right) - 2 \cdot \log_a(d) - 2 \cdot \log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5) + 6 \cdot \log_a(b) + 4 \cdot \log_a(c) + 2 \cdot \log_a(d) + 2 \cdot \log_a(e) - 6 \cdot \log_a(b) - 4 \cdot \log_a(c) - 2 \cdot \log_a(d) - 2 \cdot \log_a(e)$$

$$\Leftrightarrow -\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = \log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x) = \log_a(5)$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{c) } \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[\left((a^2 - b^2) + \lg(10^{b^2})\right)^{\frac{\ln(a^2)}{\ln(a)}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[\left((a^2 - b^2) + b^2\right)^{\log_a(a^2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) \cdot \log_a(b) = \log_a\left[(a^2)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) = \frac{\log_a(a^4)}{\log_a(b)}$$

$$\Leftrightarrow \log_b(x^2) = \log_b(a^4)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^4$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm a^2$$